

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

TIAGO LIMA DE SOUSA

IDENTIFICAÇÃO INTEGRADA DE PROPRIEDADES MECÂNICAS DE MATERIAIS
VISCOELÁSTICOS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA
CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA

CURITIBA

2018

TIAGO LIMA DE SOUSA

IDENTIFICAÇÃO INTEGRADA DE PROPRIEDADES MECÂNICAS DE MATERIAIS
VISCOELÁSTICOS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA
CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA

Tese de doutorado apresentada como requisito final à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Mecânica do Curso de Doutorado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira.

CURITIBA

2018

Catálogo na Fonte: Sistema de Bibliotecas, UFPR
Biblioteca de Ciência e Tecnologia

S725i Sousa, Tiago Lima de
 Identificação integrada de propriedades mecânicas de materiais
 viscoelásticos nos domínios do tempo e da frequência considerando a
 influência da temperatura / Tiago Lima de Sousa – Curitiba, 2018.

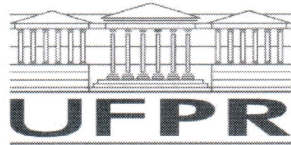
 Tese (doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de
 Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica,
 2018.

 Orientador: Jucélio Tomás Pereira.

 1. Viscoelasticidade. 2. Mecânica – Modelos matemáticos. 3 Modelo
 de Zener. I. Universidade Federal do Paraná. II. Pereira, Jucélio Tomás.
 III. Título.

CDD: 620.11232

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA
MECÂNICA - 40001016040P5

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **TIAGO LIMA DE SOUSA** intitulada: **IDENTIFICAÇÃO INTEGRADA DE PROPRIEDADES MECÂNICAS DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA**, após terem inquirido o aluno e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa. A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 18 de Dezembro de 2018.



JUCÉLIO TOMAS PEREIRA

Presidente da Banca Examinadora (UFPR)



MARILDA MUNARO

Avaliador Externo (UFPR)



EDUARDO MARCIO DE OLIVEIRA LOPES

Avaliador Interno (UFPR)



ADMILSON TEIXEIRA FRANCO

Avaliador Externo (UFPR)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela bondade e misericórdia que se renova a cada manhã, mesmo eu sendo uma pessoa falha e com vários defeitos.

Uma Tese de Doutorado não é um trabalho individual, mas uma conquista adquirida ao longo dos anos, pelo aprofundamento científico e colaboração dos trabalhos de outras pessoas. Esta tese não é diferente e tem sido longa essa tentativa e jornada. Eu não a teria feito sem a contribuição e o brilhantismo das seguintes pessoas mencionadas.

Inicialmente, agradeço ao Prof. Dr. Jucélio Tomás Pereira o qual me recebeu como aluno de Mestrado e Doutorado. Ao longo dos últimos anos tem contribuído acentuadamente para meu aprendizado, não apenas no campo acadêmico como também na área pessoal e profissional. Agradeço-lhe pela oportunidade concedida, paciência, companheirismo e comprometimento ao longo deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos do laboratório de mecânica dos sólidos e vibrações, tais como, Thiago da Silva, Francielly de Castro, Gabriella Oening Dicati, Fábio Junkes, Eduardo G. Olienick, Jéderson da Silva, Maurizio Barghouthi, Nicholas Dicati, Eduardo A. Ribeiro, entre outros.

Agradeço à banca examinadora: Admilson Teixeira Franco, Eduardo Márcio de Oliveira Lopes e Marilda Munaro, os quais se dispuseram a leitura e com valiosas contribuições.

Agradeço a minha família pela paciência e compreensão por tantos dias nos quais estive ausente para me dedicar ao desenvolvimento deste trabalho. Em especial, minha mãe Ivone Lima de Sousa, minha esposa, Cassiana F. O. de Sousa, minha filha Débora O. de Sousa e minha irmã, Elaine Lima de Sousa.

Também sou muito grato a Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Amazonas, FAPEAM, pelo suporte financeiro concedido em forma de bolsa de estudo, em nível de doutorado, sem a qual não teria sido possível o desenvolvimento deste trabalho. Bem como, ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica PGMEC da UFPR.

Os filhos são um presente do Senhor DEUS;
eles são uma recompensa que DEUS dá.
Os filhos que o homem tem na sua mocidade
são como flechas nas mãos de um arqueiro.
Feliz o homem que tem muitas dessas flechas.
Salmos 127: 3-4.

A religião que Deus aceita como pura é esta:
Cuidar dos órfãos e das viúvas em suas dificuldades.
Bem como guardar-se da corrupção do mundo.
Tiago 1:27

RESUMO

O uso de materiais viscoelásticos (MVEs) é cada vez mais frequente, seja como mitigadores de vibrações e ruídos ou como parte de componentes estruturais. Em todas as aplicações, é necessário o conhecimento de seu comportamento mecânico, o qual pode ser descrito nos domínios do tempo (módulos de relaxação em tração/cisalhamento e coeficiente de Poisson), ou da frequência (módulos complexos de Young/cisalhamento e coeficiente complexo de Poisson), considerando o efeito da temperatura. Em geral, elastômeros são tratados como quase perfeitamente incompressíveis, com valores do coeficiente de Poisson assumido como constante e ligeiramente menor que 0,5. É notável que tais considerações ignoram efeitos do tempo, da frequência e da temperatura. Assim, este trabalho discute duas metodologias computacionais, tradicional e integrada, para a identificação de MVEs lineares, isotrópicos e termorreologicamente simples, nos domínios do tempo ou da frequência e considerando influência da temperatura. As metodologias de identificação partem de conjuntos de pontos experimentais envolvendo funções viscoelásticas complexas (módulos complexos de Young e cisalhamento), definidas no domínio da frequência, ou funções viscoelásticas definidas no domínio do tempo (módulos de relaxação de Young e de cisalhamento) em diferentes temperaturas. A partir destes pontos experimentais, aplica-se uma técnica híbrida de otimização (Algoritmos Genéticos e Programação Não Linear) para obtenção dos parâmetros dos modelos constitutivos para o MVE em análise. Consolidadas as identificações, o trabalho ainda propõe e aplica uma metodologia para construção de nomogramas. Inicialmente, constroem-se nomogramas referentes às funções viscoelásticas complexas, definidas no domínio da frequência. Na sequência, são construídos nomogramas referentes às funções viscoelásticas, definidas no domínio do tempo. Os resultados das metodologias propostas se mostram promissores, confiáveis e com grande potencial de aplicação.

Palavras-chave: Funções viscoelásticas. Modelo de Zener fracionário. Otimização.

Viscoelasticidade linear. Coeficiente de Poisson no domínio do tempo. Coeficiente complexo de Poisson.

ABSTRACT

The use of viscoelastic materials (VEMs) is increasingly frequent, either as vibration and noise mitigators or as part of structural components. In all applications, it is necessary the knowledge of its mechanical behavior, which can be described in time domain (tensile/shear relaxation moduli and Poisson's ratio), or frequency domain (complex Young/shear moduli and complex Poisson's ratio), considering the temperature effects. In general, elastomers are treated as almost perfectly incompressible, with values of the Poisson coefficient assumed to be constant and slightly less than 0.5. It is notable that such considerations ignore effects of time, frequency and temperature. Thus, this paper discusses two computational methodologies, traditional and integrated, for the identification of linear, isotropic and thermoreologically simple VEMs in time or frequency domains and considering the temperature effects. The identification methodologies are based on sets of complex viscoelastic functions (complex Young and shear moduli), defined in the frequency domain, or viscoelastic functions defined in time domain (Young's relaxation modulus and shear modulus) at different temperatures. From these experimental points, a hybrid optimization technique (Genetic Algorithms and Non-Linear Programming) is applied to obtain the parameters of the constitutive models for the VEM under analysis. Consolidated the identifications, the work still proposes and applies a methodology for the construction of nomograms. Initially, nomograms for complex viscoelastic functions defined in the frequency domain are constructed. Subsequently, nomograms relating to viscoelastic functions, defined in the time domain, are constructed. The results of the proposed methodologies are promising, reliable and with great application potential.

Key-words: Viscoelastic functions. Fractional Zener Model. Optimization.

Linear viscoelasticity. Poisson's ratio in the time domain.

Complex Poisson's ratio.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 - RESUMO DE MÉTODOS EXPERIMENTAIS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA.....	25
FIGURA 2 - EXEMPLO DAS ESTRUTURAS DE POLÍMEROS LINEARES, RAMIFICADOS E ENTRECruzADOS.....	46
FIGURA 3 - ESTRUTURAS MOLECULARES NOS POLÍMEROS TERMOPLÁSTICOS E TERMOFIXOS.	48
FIGURA 4 - ILUSTRAÇÃO DA CURVA MESTRE PARA UM EPÓXI MODIFICADO	50
FIGURA 5 - DIAGRAMA VOLUME VERSUS TEMPERATURA PARA MATERIAL POLIMÉRICO AMORFO	51
FIGURA 6 - ENSAIO DE FLUÊNCIA. CURVA DE TENSÃO (A) E DE DEFORMAÇÃO (B).....	53
FIGURA 7 - TESTE DE RELAXAÇÃO. CURVA DE DEFORMAÇÃO (A) E DE TENSÃO (B).....	54
FIGURA 8 - REPRESENTAÇÃO DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO LINEAR. SOMATÓRIO DE DEFORMAÇÕES NA FAIXA LINEAR RESULTANTE DE APLICAÇÕES CONSECUTIVAS DE TENSÕES....	55
FIGURA 9 - REPRESENTAÇÃO DO PROCESSO DE MEDIÇÃO DO COEFICIENTE DE POISSON PELO MÉTODO DIRETO	58
FIGURA 10 - ELEMENTOS REOLÓGICOS FÍSICOS BÁSICOS DE MODELOS DA VISCOELASTICIDADE FRACIONÁRIA.....	60
FIGURA 11 - REPRESENTAÇÃO DO MODELO DE ZENER FRACIONÁRIO. PARÂMETROS RELACIONADOS A ENSAIO UNIAXIAL (OU CISCALHAMENTO PURO).....	70
FIGURA 12 - ILUSTRAÇÃO DO MÓDULO DINÂMICO DE YOUNG E DO FATOR DE PERDA PARA DIFERENTES ORDENS DE DIFERENCIAÇÃO	73
FIGURA 13 - LABORATÓRIO C. DADOS EXPERIMENTAIS PARA O MÓDULO COMPLEXO DE YOUNG: MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA).....	83
FIGURA 14 - LABORATÓRIO C. DADOS EXPERIMENTAIS PARA O MÓDULO COMPLEXO DE CISCALHAMENTO: MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)	83

FIGURA 15 - LABORATÓRIO E. DADOS EXPERIMENTAIS PARA O MÓDULO COMPLEXO DE YOUNG: MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA).....	84
FIGURA 16 - LABORATÓRIO E. DADOS EXPERIMENTAIS PARA O MÓDULO COMPLEXO DE CISALHAMENTO: MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)	84
FIGURA 17 - ESTRUTURA DO ALGORITMO IMPLEMENTADO EM AMBIENTE MATLAB®	89
FIGURA 18 - DADOS EXPERIMENTAIS ARTIFICIAIS GERADOS A PARTIR DAS PROPRIEDADES OBTIDAS POR SOUSA ET AL. (2018). MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE YOUNG (ESQUERDA); MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE CISALHAMENTO (DIREITA). DISPERSÃO DE 0%.....	91
FIGURA 19 - DADOS EXPERIMENTAIS ARTIFICIAIS GERADOS A PARTIR DAS PROPRIEDADES OBTIDAS POR SOUSA ET AL. (2018). MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE YOUNG (ESQUERDA); MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE CISALHAMENTO (DIREITA). DISPERSÃO DE +/-10%	91
FIGURA 20 - DADOS EXPERIMENTAIS ARTIFICIAIS GERADOS A PARTIR DAS PROPRIEDADES OBTIDAS POR SOUSA ET AL. (2018). MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE YOUNG (ESQUERDA); MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE CISALHAMENTO (DIREITA). DISPERSÃO DE +/-20%	91
FIGURA 21 - ALGORITMO DE CONSTRUÇÃO DE NOMOGRAMAS, DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA	97
FIGURA 22 - NOMOGRAMA PARA O MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE YOUNG ...	98
FIGURA 23 - PSEUDO ALGORITMO PARA OBTENÇÃO DE PROPRIEDADES DINÂMICAS DE MVES DEFINIDOS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA.....	98
FIGURA 24 - LABORATORIO C. DADOS EXPERIMENTAIS E AJUSTADOS PARA O MÓDULO COMPLEXO DE YOUNG: MÓDULO DINÂMICO DE YOUNG (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA).....	100
FIGURA 25 - LABORATORIO C. DADOS EXPERIMENTAIS E AJUSTADOS PARA O MÓDULO COMPLEXO DE CISALHAMENTO: MÓDULO DINÂMICO DE CISALHAMENTO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA).....	100

FIGURA 26 - MÉTODO TRADICIONAL. COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON: MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E FATOR DE PERDA (DIREITA)	101
FIGURA 27 - LABORATÓRIO C. FATOR DE DESLOCAMENTO TEMPO- TEMPERATURA. AS LINHAS PONTILHADAS REFEREM-SE AO MÉTODO TRADICIONAL E AS LINHAS CONTÍNUAS REFEREM-SE AO MÉTODO INTEGRADO	102
FIGURA 28 - MÉTODO INTEGRADO. COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON: MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E FATOR DE PERDA (DIREITA)	103
FIGURA 29 - LABORATÓRIO C. FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS COMPLEXAS (VOLUMÉTRICO, YOUNG E DE CISALHAMENTO): MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)	103
FIGURA 30 - LABORATÓRIO E. DADOS EXPERIMENTAIS E AJUSTADOS: MÓDULO COMPLEXO DE YOUNG. MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)	105
FIGURA 31 - LABORATÓRIO E. DADOS EXPERIMENTAIS E AJUSTADOS: MÓDULO COMPLEXO DE CISALHAMENTO. MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)	105
FIGURA 32 - LABORATÓRIO E. FATOR DE DESLOCAMENTO COMO FUNÇÃO DA TEMPERATURA. AS LINHAS PONTILHADAS ESTÃO RELACIONADAS AO MÉTODO TRADICIONAL E AS LINHAS CONTÍNUAS ESTÃO RELACIONADAS AO MÉTODO INTEGRADO.	106
FIGURA 33 - LABORATÓRIO E. FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS COMPLEXAS (VOLUMÉTRICO, YOUNG E DE CISALHAMENTO): MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)	107
FIGURA 34 - DADOS EXPERIMENTAIS (0% DE DISPERSÃO) E MODELOS AJUSTADOS PARA MÓDULO DE RELAXAÇÃO (ESQUERDA) E COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO (DIREITA)	109
FIGURA 35 - DADOS EXPERIMENTAIS (10% DE DISPERSÃO) E MODELOS AJUSTADOS PARA MÓDULO DE RELAXAÇÃO (ESQUERDA) E COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO (DIREITA)	109

FIGURA 36 - DADOS EXPERIMENTAIS (20% DE DISPERSÃO) E MODELOS AJUSTADOS PARA MÓDULO DE RELAXAÇÃO (ESQUERDA) E COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO (DIREITA)	110
FIGURA 37 - COMPARAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON CONSIDERANDO EXPERIMENTOS COM DISPERSÃO NULA.....	110
FIGURA 38 - COMPARAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON CONSIDERANDO EXPERIMENTOS COM DISPERSÃO DE +/-10%.....	110
FIGURA 39 - COMPARAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON CONSIDERANDO EXPERIMENTOS COM DISPERSÃO DE +/-20%.....	111
FIGURA 40 - DADOS EXPERIMENTAIS (0% DE DISPERSÃO) E MODELOS AJUSTADOS PARA MÓDULO DE RELAXAÇÃO (ESQUERDA) E COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO (DIREITA)	113
FIGURA 41 - DADOS EXPERIMENTAIS (10% DE DISPERSÃO) E MODELOS AJUSTADOS PARA MÓDULO DE RELAXAÇÃO (ESQUERDA) E COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO (DIREITA)	113
FIGURA 42 - DADOS EXPERIMENTAIS (20% DE DISPERSÃO) E MODELOS AJUSTADOS PARA MÓDULO DE RELAXAÇÃO (ESQUERDA) E COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO (DIREITA)	113
FIGURA 43 - COMPARAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON CONSIDERANDO EXPERIMENTOS COM DISPERSÃO NULA.....	114
FIGURA 44 - COMPARAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON CONSIDERANDO EXPERIMENTOS COM DISPERSÃO DE +/- 10%.....	114
FIGURA 45 - COMPARAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON CONSIDERANDO EXPERIMENTOS COM DISPERSÃO DE +/- 20%.....	114
FIGURA 46 - NOMOGRAMA DO MÓDULO COMPLEXO DE YOUNG (ESQUERDA) E NOMOGRAMA DO MÓDULO COMPLEXO DE CISALHAMENTO (DIREITA).....	116
FIGURA 47 - NOMOGRAMA DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON.....	116

FIGURA 48 - NOMOGRAMA PARA OS MÓDULOS DE RELAXAÇÃO EM TRAÇÃO (ESQUERDA) E CISALHAMENTO (DIREITA).....	118
FIGURA 49 - NOMOGRAMA DO COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO	118
FIGURA 50. REPRESENTAÇÃO DA FUNÇÃO DE ML.....	138

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - CLASSIFICAÇÃO DOS COPOLÍMEROS	46
TABELA 2 - TABELA-RESUMO COM AS PRINCIPAIS FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS	79
TABELA 3 - LIMITES DAS PROPRIEDADES MATERIAIS UTILIZADOS NO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO: DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	89
TABELA 4 - LIMITES DAS PROPRIEDADES MATERIAIS UTILIZADOS NO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO: DOMÍNIO DO TEMPO	96
TABELA 5 - LABORATÓRIO C. PROPRIEDADES IDENTIFICADAS DAS FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS COMPLEXAS (YOUNG E CISALHAMENTO): MÉTODOS TRADICIONAL E INTEGRADO.....	101
TABELA 6 - LABORATÓRIO E: PROPRIEDADES IDENTIFICADAS DOS MÓDULOS COMPLEXOS (YOUNG E DE CISALHAMENTO): MÉTODOS TRADICIONAL E INTEGRADO.....	104
TABELA 7 - PROPRIEDADES OBTIDAS PARA DIFERENTES DISPERSÕES: MÉTODO TRADICIONAL.....	108
TABELA 8 - PROPRIEDADES IDENTIFICADAS PARA DIFERENTES DISPERSÕES: MÉTODO INTEGRADO	112
TABELA 9 - PROPRIEDADES MECÂNICAS DO MATERIAL EAR®-C1002 OBTIDAS A PARTIR DA TABELA 8	115
TABELA 10 - PRINCIPAIS TRANSFORMADAS DE LAPLACE ÚTEIS PARA O CORRENTE TRABALHO	143

LISTA DE ABREVIATURAS

AG	- Algoritmo Genético.
ASTM	- <i>American Society for Testing and Materials.</i>
CAMPUS	- <i>Computer Aided Material Pre-Selection by Uniform Standards.</i>
CFS	- <i>Closed Form Shifting.</i>
DMA	- <i>Dynamic Mechanical Analysis.</i>
MVE	- Material Viscoelástico.
ML	- Mittag-Leffler.
PEAD	- Polietileno de Alta Densidade
PEBD	- Polietileno de Baixa Densidade
PMMA	- Polimetil-Metacrilato.
PNL	- Programação Não Linear.
PSTT	- Princípio da Superposição Tempo-Temperatura.
PVC	- Policloreto de Polivinila.
TIL	- Transformada Inversa de Laplace
TL	- Transformada de Laplace
UFPR	- Universidade Federal do Paraná.
WLF	- Modelo de Williams-Landel-Ferry.

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto Latino

- b_E - Parâmetro relacionado ao tempo de relaxação para o módulo de Young [s^β].
- b_G - Parâmetro relacionado ao tempo de relaxação para o módulo de cisalhamento [s^β].
- C_1 - Constante do material para o fator de deslocamento de temperatura: Modelo WLF.
- C_2 - Constante do material para o fator de deslocamento de temperatura: Modelo WLF [$^\circ\text{C}$].
- $D(t)$ - Módulo uniaxial de fluência no domínio do tempo [Pa^{-1}].
- $D(s)$ - Módulo de fluência uniaxial no domínio de Laplace.
- $\tilde{D}(s)$ - Módulo operacional de fluência uniaxial.
- E - Módulo de rigidez elástico [Pa].
- $E_\beta(\cdot)$ - Função de Mittag-Leffler de um parâmetro de ordem β .
- E_∞ - Módulo de equilíbrio para ensaio uniaxial no domínio do tempo [Pa].
- E_0 - Módulo vítreo para ensaio uniaxial no domínio do tempo [Pa].
- $E(t)$ - Módulo uniaxial de relaxação no domínio do tempo [Pa].
- $E^*(\Omega)$ - Módulo complexo uniaxial para relaxação no domínio da frequência.
- $E'(\Omega)$ - Parte real do módulo uniaxial de relaxação no domínio da frequência [Pa].
- $E''(\Omega)$ - Parte imaginária do módulo uniaxial de relaxação na frequência [Pa].
- $E(s)$ - Módulo de relaxação de Young no domínio de Laplace.
- $\tilde{E}(s)$ - Módulo operacional de Young.
- f - Fração de volume livre.
- G_∞ - Módulo de equilíbrio para ensaio de cisalhamento em relaxação para o domínio do tempo [Pa].
- $G(t)$ - Módulo de cisalhamento de relaxação no domínio do tempo [Pa].
- $G^*(\Omega)$ - Módulo complexo de cisalhamento para relaxação no domínio da frequência.
- $G'(\Omega)$ - Parte real do módulo complexo de cisalhamento para relaxação no domínio da frequência [Pa].

- $G''(\Omega)$ - Parte imaginária do módulo de cisalhamento para relaxação no domínio da frequência [Pa].
- $G(s)$ - Módulo de relaxação de cisalhamento no domínio de Laplace.
- $\tilde{G}(s)$ - Módulo operacional de cisalhamento.
- $H(t)$ - Função *Heavyside* no domínio do tempo.
- $J(t)$ - Módulo de cisalhamento de fluência no domínio do tempo [Pa⁻¹].
- $J'(\Omega)$ - Parcela real do módulo de cisalhamento de fluência no domínio da frequência [Pa⁻¹].
- $J''(\Omega)$ - Parte imaginária do módulo complexo de cisalhamento de fluência na frequência [Pa⁻¹].
- $J(s)$ - Módulo de fluência de cisalhamento no domínio de Laplace.
- $\tilde{J}(s)$ - Módulo operacional de fluência de cisalhamento.
- $K(t)$ - Módulo volumétrico de relaxação no domínio do tempo [Pa].
- $K'(\Omega)$ - Parte real do módulo volumétrico de relaxação no domínio da frequência [Pa].
- $K''(\Omega)$ - Parte imaginária do módulo volumétrico de relaxação no domínio da frequência [Pa].
- L - Operador da transformada de Laplace.
- R - Conjunto dos números reais.
- T - Temperatura [°C].
- t - Tempo [segundos].
- t_R - Tempo reduzido [segundos].
- T_g - Temperatura de transição vítrea [°C].
- T_m - Temperatura de fusão [°C].
- T_0 - Temperatura de referência [°C].
- V_ϕ - Volume ocupado por moléculas [m³].
- V_f - Volume livre não ocupado pelas moléculas [m³].
- V - Volume [m³].

Alfabeto Grego

α_T	- Fator de deslocamento para temperatura.
β	- Constante de ordem fracionária.
$\gamma(t)$	- Deformação de cisalhamento no domínio do tempo [mm/mm].
$\gamma(s)$	- Deformação de cisalhamento no domínio de Laplace.
$\Gamma(\cdot)$	- Função gama de Euler.
$\delta_{ij}(\cdot)$	- Delta de Kronecker.
ε	- Deformação [mm/mm].
$\varepsilon(s)$	- Deformação uniaxial no domínio de Laplace.
$\varepsilon(t)$	- Deformação no domínio do tempo [mm/mm].
$\tilde{\lambda}(s)$	- Função relacionada à constante de Lamé no domínio de Laplace.
ξ	- Variável de integração.
η	- Viscosidade do material.
$\eta(\Omega)$	- Fator de perda para o domínio da frequência.
σ	- Tensão [Pa].
$\sigma(s)$	- Tensão uniaxial no domínio de Laplace.
$\sigma(t)$	- Tensão uniaxial no domínio do tempo [Pa].
τ	- Tempo de relaxação [segundo].
$\tau(t)$	- Tensão de cisalhamento no domínio do tempo [Pa].
$\tau(s)$	- Tensão de cisalhamento no domínio de Laplace.
Ω	- Frequência [segundo ⁻¹].
Ω_R	- Frequência reduzida [segundo ⁻¹].
ν	- Coeficiente de Poisson.
ν_0	- Coeficiente de Poisson instantâneo.
ν_∞	- Coeficiente de Poisson de equilíbrio.
μ	- Coeficiente de viscosidade do modelo fracionário.
$\nu(t)$	- Coeficiente de Poisson no domínio do tempo.
$\nu^*(\Omega)$	- Coeficiente complexo de Poisson.

$\nu'(\Omega)$ - Coeficiente dinâmico de Poisson.

$\nu''(\Omega)$ - Coeficiente de perda de Poisson.

$\nu(s)$ - Coeficiente de Poisson no domínio de Laplace.

$\tilde{\nu}(s)$ - Coeficiente operacional de Poisson.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	22
1.1	OBJETIVOS.....	23
1.1.1	Objetivo geral.....	23
1.1.2	Objetivos específicos	23
1.2	ESTRUTURA DO TEXTO.....	24
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	25
2.1	CARACTERIZAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO.....	26
2.1.1	Caracterização via ensaios de relaxação e fluência	26
2.1.2	Caracterização via ensaios tensão-deformação do tipo destrutivo	30
2.2	CARACTERIZAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	31
2.2.1	Caracterização utilizando técnicas DMA.....	32
2.2.2	Identificação utilizando ensaios de transmissibilidade	33
2.3	MÉTODOS DE INTERCONVERSÃO	33
2.3.1	Interconversão relaxação-fluência	34
2.3.2	Interconversão tempo-frequência	36
2.4	IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO OU DA FREQUÊNCIA	37
2.4.1	Identificação do coeficiente de Poisson no domínio do tempo empregando o método direto.....	37
2.4.2	Identificação do coeficiente de Poisson no domínio do tempo empregando o método indireto	39
2.4.3	Identificação do coeficiente de Poisson no domínio da frequência: Método direto	41
2.4.4	Identificação do coeficiente de Poisson no domínio da frequência: Método indireto.....	41
2.5	PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES.....	43
3	REVISÃO CONCEITUAL	45
3.1	CONCEITO DE POLÍMERO	45
3.1.1	Copolímeros	45
3.1.2	Configuração molecular	45
3.1.3	Classificação dos polímeros termoplásticos e termofixos.....	47
3.1.4	Efeito da temperatura em polímeros.....	48

3.2	COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO DE POLÍMEROS	52
3.2.1	Fluência e relaxação.....	53
3.2.2	Princípio da superposição de Boltzmann.....	55
3.2.3	Coeficiente complexo de Poisson	57
3.2.4	Viscoelasticidade fracionária	59
3.3	PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA	60
3.3.1	Relações fundamentais no Princípio da Correspondência Elástico-Viscoelástico	61
3.3.2	Resposta à excitação do tipo degrau unitário	62
3.3.3	Lei de Hooke Generalizada no domínio de Laplace	64
3.3.4	Coeficiente operacional de Poisson.....	65
3.3.5	Funções viscoelásticas complexas: domínio da frequência.....	67
3.4	FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS: MODELO DE ZENER FRACIONÁRIO	69
3.4.1	Funções viscoelásticas operacionais.....	71
3.4.2	Funções viscoelásticas complexas no domínio da frequência considerando influência da temperatura	72
3.4.3	Funções viscoelásticas no domínio do tempo considerando influência da temperatura	74
3.4.4	Proposta de modelo para coeficiente de Poisson: domínio do tempo	76
3.4.5	Resumo das principais funções viscoelásticas	78
3.5	OTIMIZAÇÃO	79
4	METODOLOGIA PROPOSTA DE IDENTIFICAÇÃO DE MVES NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	82
4.1	DADOS EXPERIMENTAIS	82
4.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA PADRÃO DE OTIMIZAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA: METODOLOGIAS TRADICIONAL E INTEGRADA	84
4.2.1	Metodologia tradicional de identificação de MVEs no domínio da frequência	86
4.2.2	Metodologia integrada de identificação de MVEs no domínio da frequência	87
4.2.3	Estrutura computacional no domínio da frequência	88
5	METODOLOGIA PROPOSTA DE IDENTIFICAÇÃO DE MVES NO DOMÍNIO DO TEMPO.....	90
5.1	DADOS EXPERIMENTAIS	90
5.2	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA PADRÃO DE OTIMIZAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO: METODOLOGIAS TRADICIONAL E INTEGRADA	92

5.2.1	Método tradicional de identificação de MVEs no domínio do tempo.....	93
5.2.2	Método integrado de identificação de MVEs no domínio do tempo	94
5.2.3	Estrutura computacional de identificação para o domínio do tempo.....	95
6	METODOLOGIA PROPOSTA PARA CONSTRUÇÃO E AVALIAÇÃO DE NOMOGRAMAS DE FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA.....	97
6.1	METODOLOGIA PROPOSTA PARA CONSTRUÇÃO DE NOMOGRAMAS..	97
6.2	AVALIAÇÃO E OBTENÇÃO DE PROPRIEDADES DINÂMICAS A PARTIR DE NOMOGRAMAS	98
7	RESULTADOS E DISCUSSÕES	99
7.1	IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	99
7.1.1	Identificação dos parâmetros viscoelásticos – Laboratório C	99
7.1.2	Identificação dos parâmetros viscoelásticos – Laboratório E	104
7.2	IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO	107
7.2.1	Metodologia tradicional	107
7.2.2	Metodologia integrada	111
7.3	NOMOGRAMAS DE FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA	114
7.3.1	Nomograma dos módulos complexos de Young de cisalhamento e do coeficiente complexo de Poisson.....	115
7.3.2	Nomograma dos módulos de relaxação em tração cisalhamento e do coeficiente de Poisson definidos no domínio do tempo	117
8	CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS	119
8.1	IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	119
8.2	IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO	120
8.3	NOMOGRAMAS DE FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA	121
8.4	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....	122
	REFERÊNCIAS	123
	APÊNDICE 1	135
	APÊNDICE 2	139

1 INTRODUÇÃO

Ao longo das últimas décadas, tem sido crescente o emprego de materiais viscoelásticos (MVEs) em diversos setores da engenharia, tais como construção civil, indústrias automotivas e aeroespaciais, geração de energia eólica, meios de transporte de pessoas, biomédica etc.. Como exemplos práticos de MVEs, podem-se citar as misturas asfálticas, coxins, para-choques, absorvedores de vibração elastoméricos, tubulações para transporte de água, brinquedos em geral, embalagens, utensílios domésticos, sondas gastrointestinais, seringas etc.. Conforme Lai (1995), as principais motivações para a utilização dos polímeros sintéticos na engenharia são suas propriedades mecânicas, dentre as quais se destacam: baixa densidade, alta resistência à corrosão, flexibilidade, boa resistência ao impacto e facilidade tanto para a manufatura como para a moldagem.

Em meio aos diversos materiais que exibem comportamentos viscoelásticos, é dedicada aqui atenção aos polímeros sintéticos, na forma de borrachas. Tais materiais são frequentemente utilizados no controle de vibrações em estruturas e/ou como parte de componentes estruturais (NASHIF, JONES e HENDERSON, 1985; PACHECO, 2013; KUHL, 2014; RIBEIRO, PEREIRA e BAVASTRI, 2015). Em todas as aplicações, é necessário garantir que o projeto do produto responda de forma adequada às solicitações mecânicas envolvidas, a fim de evitar falhas e/ou medidas indesejáveis de deformações (LAI, 1995). Para tanto, é fundamental o conhecimento das principais propriedades dos polímeros para o correto entendimento do comportamento mecânico associado.

Em relação ao comportamento mecânico, uma das principais propriedades dos polímeros é a viscoelasticidade. Segundo Findley, Lay e Onaran (1976), Nashif et al. (1985), Jones (1974) e Brinson e Brinson (2008) os desempenhos de materiais poliméricos podem ser preditos por meio das seguintes funções viscoelásticas:

- Domínio da frequência: módulos complexos (de Young, de cisalhamento e volumétrico) e coeficiente complexo de Poisson.
- Domínio do tempo: módulos de relaxação ou de fluência (em tração e/ou cisalhamento) e coeficiente de Poisson.

Conforme Nashif et al. (1985), as funções viscoelásticas dependem fortemente da temperatura, frequência, tensão-inicial, nível da força dinâmica,

umidade relativa, entre outros fatores. Os mais relevantes, afirmam Sjöberg (2002) e Lakes e Capodagli (2008), são; temperatura, o tempo e a frequência.

Dessa forma, para predições do comportamento e aplicações confiáveis desse tipo de material, é necessária a caracterização apropriada dos modelos constitutivos associados. Posto isso, na Seção 1.1 são apresentados os objetivos desta tese.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é propor e implementar computacionalmente metodologias de caracterização de MVEs sólidos lineares e termorreologicamente simples descritos nos domínios da frequência e/ou do tempo. Essas metodologias são baseadas na utilização de diferentes dados experimentais clássicos, definidos nos domínios da frequência ou do tempo, considerando a influência da temperatura, além de ter como base o modelo de Zener Fracionário, o qual é combinado com um fator de deslocamento dependente do efeito da temperatura.

1.1.2 Objetivos específicos

Em consonância com o objetivo geral, os seguintes objetivos específicos são apresentados como:

- Desenvolver e aplicar uma metodologia numérica para caracterizar indiretamente o coeficiente complexo de Poisson, definido no domínio da frequência;
- Desenvolver e aplicar uma metodologia numérica para caracterizar indiretamente o coeficiente de Poisson, definido para o domínio do tempo;
- Apresentar os nomogramas dos módulos complexos de Young e de cisalhamento, definidos no domínio da frequência;
- Propor a construção de um nomograma para o coeficiente complexo de Poisson, definido no domínio da frequência;

- Propor a construção de nomogramas para os módulos de relaxação (em tração e em cisalhamento) e para o coeficiente de Poisson, definidos no domínio do tempo.

1.2 ESTRUTURA DO TEXTO

Este trabalho está dividido em oito capítulos. O presente capítulo introduz as principais motivações e justificativas para o desenvolvimento do trabalho. Além disso, descrevem-se os objetivos gerais e o específico. O capítulo é encerrado com a visão geral de como está estruturado todo o texto da tese.

O capítulo dois apresenta a revisão bibliográfica da literatura referente às técnicas de identificação de MVEs, tanto para o domínio do tempo como para o da frequência. Por fim, são discutidas as principais contribuições deste trabalho.

O capítulo três apresenta a revisão conceitual sobre polímeros, seus principais comportamentos mecânicos viscoelásticos e modelos que buscam descrevê-los. O capítulo é encerrado com a revisão sobre processo de otimização, a qual é utilizada para identificação dos modelos viscoelásticos fracionários. A pesquisa desenvolvida neste capítulo tem o intuito de fornecer embasamento para a elaboração da metodologia proposta de identificação do material, desenvolvida na sequência.

Os capítulos quatro e cinco descrevem metodologias propostas de identificação de MVEs, envolvendo conjuntos de dados experimentais no domínio da frequência (ou do tempo) considerando o efeito da temperatura.

O capítulo seis propõe a metodologia para construção e avaliação de nomogramas nos domínios do tempo e da frequência.

O capítulo sete apresenta resultados e as discussões referentes às identificações nos domínios do tempo e da frequência. Consolidadas as identificações, são propostos nomogramas para algumas funções viscoelásticas, nos domínios do tempo e da frequência.

O capítulo oito discute as conclusões e sugestões de trabalhos futuros.

Por fim, o texto é finalizado com as referências bibliográficas e os apêndices.

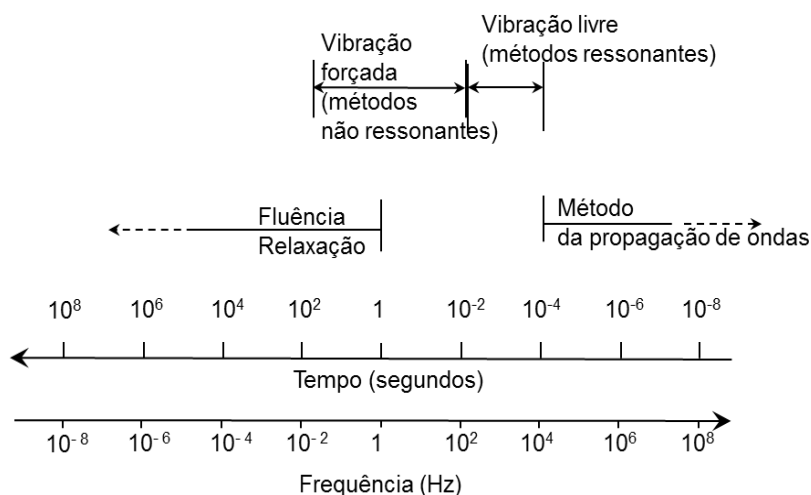
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Em projetos envolvendo aplicações de materiais poliméricos com comportamento viscoelástico, deve ser considerado que os carregamentos podem ser aplicados rapidamente (nos casos de impactos), durante longos intervalos de tempo (para componente submetido a cargas estáticas) ou sob amplas faixas de frequências (quando submetidos a solicitações dinâmicas). Isto posto, Lakes (2004), Ward e Sweeney (2004) e Lakes (2009) dividem as classes de experimentos para caracterização de MVEs em medições no domínio do tempo e/ou da frequência onde, em cada domínio, pode-se avaliar a influência da temperatura.

Os experimentos mais comuns para caracterização de MVEs no domínio do tempo são os ensaios de fluência, relaxação e tensão-deformação do tipo destrutivo.

Por outro lado, no domínio da frequência, podem-se mencionar diversos métodos. Entre estes estão os métodos ressonantes (ensaios de vibrações livres), os métodos não ressonantes (ensaios envolvendo vibrações forçadas) e os métodos envolvendo técnicas de propagação de ondas. A FIGURA 1 indica o intervalo aproximado, em escala de frequência e tempo, em que cada método é mais adequado para identificar as propriedades dos MVEs.

FIGURA 1 - RESUMO DE MÉTODOS EXPERIMENTAIS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA.



FONTE: adaptado de Ward e Sweeney (2004).

Conforme Ward e Sweeney (2004), para a caracterização em intervalos de tempos e/ou frequência estendidos, são necessárias várias técnicas combinadas. Alternativamente, a aplicação do Princípio da Superposição Tempo Temperatura

(PSTT), introduzido por Ferry (1980), mostra-se uma ferramenta mais simples, robusta e eficiente, como extensamente relatado na bibliografia (JULIAN, 1994; PARK e KIM, 2001; HE, 2005; CHAILLEUX, et al., 2006; HU et al., 2006; CHAE et al., 2010; GERGESOVA et al., 2010; BARRUETABEÑA et al., 2011; GUEDES, 2011; LIN et al., 2011; ROULEAU et al., 2015; GERGESOVA, SAPRUNOV e EMRI, 2016; SOUSA, 2015).

O corrente capítulo apresenta a revisão bibliográfica referente as metodologias para:

- Caracterização de MVEs no domínio do tempo;
- Caracterização de MVEs no domínio da frequência;
- Métodos de interconversão;
- Identificação do coeficiente complexo de Poisson, definido no domínio da frequência;
- Identificação do coeficiente de Poisson, definido no domínio do tempo.

Consolidada a revisão bibliográfica, o capítulo é encerrado com as principais contribuições do corrente trabalho para o estado da arte.

2.1 CARACTERIZAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

Esta seção apresenta e discute metodologias de identificação de MVEs no domínio do tempo através de ensaios de relaxação, fluência e tensão-deformação do tipo destrutivo.

2.1.1 Caracterização via ensaios de relaxação e fluência

A identificação de MVEs abrangendo ensaios experimentais de relaxação ou fluência é extensamente relatada na bibliografia. Como exemplos, podem ser citados Scharpery (1961), Soussou, Moavenzadeh e Gradowczyk (1970) e Chen (2000). Esses trabalhos obtêm curvas experimentais de relaxação, ou fluência, no domínio do tempo e, empregando o método da colocação ou dos mínimos quadrados, ajustam modelos teóricos aos dados experimentais. Embora os resultados nesses ajustes sejam satisfatórios, em todos os casos, os primeiros instantes experimentais (em geral, alguns segundos) são ignorados. Isto porque, por exemplo, em ensaios de relaxação, não é possível obter uma deformação instantânea, já que, inicialmente, é

necessária a aplicação de uma rampa de tensão até atingir o valor de deformação desejado. Essa metodologia é denominada, segundo Kelchner e Aklonis (1971), Meissner (1978), Flory e McKenna (2004) e Stankiewicz (2013), como método *ten times rule*. Este método propõe que o módulo de relaxação seja identificado a partir de $10t_1$, onde t_1 denota o tempo, em um ensaio de relaxação, quando a máxima deformação é alcançada e, a partir disso, é mantida constante. No entanto, o intervalo ignorado é importante, pois possibilita uma predição com maior precisão e exatidão do módulo de relaxação/fluência em um tempo que tenda a zero. Nesse contexto, outras propostas de identificação também são apresentadas nas últimas décadas (WILLIAMS e WATTS, 1970; ZAPAS e PHILIPS, 1971; SMITH, 1979; LEE e KNAUSS, 2000; SORVARI e MALINEN, 2006; SORVARI e MALINEN, 2007; KNAUSS e ZHAO, 2007; XU, HAN e ZHOU, 2013; STANKIEWICZ, 2013).

Zapas e Philips (1971) propõe uma metodologia na qual o MVE é caracterizado durante o intervalo de aplicação da rampa de deformação. Nesta metodologia, o módulo de relaxação é caracterizado a partir de um tempo $t_1 / 2$. Tal técnica é conhecida, na literatura, como método Zapas-Philips. No entanto, existem materiais que possuem necessidade que o módulo de relaxação seja predito para tempos inferiores a $t_1 / 2$.

Smith (1979) utilizou métodos computacionais de procedimento recursivo propostos por Kelchner e Aklonis (1971) com o intuito de melhoria das considerações postas no método *ten times rule*. Para tanto, o procedimento requer que a resposta de tensão para a rampa de deformação possa ser medida com boa acurácia no intervalo de tempo $t < t_1$. Nesse caso, o procedimento é aplicado com base na derivada da função tensão onde os dados experimentais pertencem ao intervalo $0 < t < t_1$. Tal metodologia resulta em um módulo de relaxação pouco acurado.

Outro método é apresentado por Lee e Knauss (2000). O trabalho apresenta um procedimento recursivo para a determinação do módulo de relaxação, incluindo todo o teste de rampa de deformação. O método se mostra muito preciso caso alguns requisitos sejam satisfeitos. Inicialmente, calcula-se o módulo de relaxação utilizando o método “*ten times rule*” (MEISSNER, 1978). Na sequência, o módulo de relaxação é calculado a partir da derivada da tensão no intervalo de rampa. Contudo, há várias desvantagens em seguir o procedimento de derivada recursiva, pois este método contém diferenciação numérica da tensão, o que pode conduzir a uma reduzida

confiabilidade de resultados. Com isso, os valores iniciais do módulo de relaxação, para um tempo tendendo a zero, devem ser aproximados neste método.

Flory e McKenna (2004), assumindo o módulo de relaxação representado na forma

$$E(t) = E_0 \exp\left(-\left(t/\tau\right)^\beta\right), \quad (1)$$

a qual foi proposta por Williams e Watts (1970), compara o método Zapas-Philips com o método Lee-Knauss. O trabalho infere que o método Zapas-Philips fornece melhor resultado para descrever a resposta do material quando $t < t_1$.

Sorvari e Mallinen (2006) apresenta um método numérico, similar à proposta sugerida por Zappas e Phillips (1971), para computação do módulo de relaxação de um MVE linear. Porém, neste caso, o método é baseado numa integração numérica trapezoidal da equação constitutiva viscoelástica de Boltzmann. A metodologia de Sorvari e Mallinen (2006) é válida para testes de relaxação sob uma taxa constante de deformação de modo que há a possibilidade de determinar o módulo de relaxação para tempos menores que $t_1 / 2$, diferentemente do método Zapas-Philips.

É importante notar que os métodos precedentes, tais como o “*ten times rule*” e os métodos de Zapas-Philips e de Sorvari e Mallinen (2006), são aplicados especificamente durante o regime permanente ou transiente (intervalo de rampa). Nesta circunstância, um método que busca identificar funções viscoelásticas, no tempo, a partir de experimento em regime transiente e/ou permanente, é apresentado por Sorvari e Mallinen (2007). O trabalho apresenta dois métodos para estimar funções de MVEs (tais como fluência e relaxação) a partir de experimentos realizados sob excitações randômicas. No primeiro, a relação constitutiva, do modelo constitutivo viscoelástico de Boltzman, é discretizada em um sistema linear de equações. Devido ao mal condicionamento da matriz resultante, o sistema é resolvido através da regularização de Tikhonov. O outro método consiste na transformação da relação integral em uma fórmula recursiva utilizando séries de Prony.

Nessa mesma linha de pesquisa, Xu, Han e Zhou (2013) apresenta um método que utiliza o modelo de Wiechert e a relação constitutiva de Boltzmann e obtém uma expressão tensão por tempo, a qual possibilita calcular a tensão correspondente quando a rampa de deformação é aplicada (taxa de deformação constante) e, posteriormente, quando a deformação é constante.

Outrossim, Stankiewicz (2013), utilizando a relação constitutiva de Boltzmann e empregando quadraturas numéricas de integração, tais como a regra do ponto médio e a regra de Simpson, apresenta um modelo aproximado de relaxação cujo cerne é a caracterização considerando todo o tempo de ensaio, desde o regime transiente, onde a rampa de deformação é aplicada, até o regime permanente, onde a deformação se mantém constante.

Nota-se que, nos trabalhos descritos acima, não é considerada a influência da temperatura. Além disso, os trabalhos realizam identificação apenas no intervalo de tempo de ensaio o qual, geralmente, é curto. Nesse caso, não há grande precisão e exatidão na identificação de parâmetros relacionados a valores de tempos muito pequenos (tendendo a zero) e nem para tempos estendidos. Desta forma, objetivando prever o módulo de relaxação/fluência que compreende ambos extremos de tempo, Julian (1994), Park e Kim (2001), Hu et al. (2006), Chae et al. (2010), Barruetabeña et al. (2011) e Lin et al. (2011) realizam ensaios de relaxação (ou fluência) em várias temperaturas. Nesse caso, empregando o PSTT, é construída manualmente uma curva de relaxação (ou fluência), dita curva mestre, em uma temperatura de referência a qual abrange um maior intervalo de tempo. Por fim, a curva mestre é identificada utilizando modelos constitutivos tais como de Wiechert, de Voigt generalizado e/ou de Zener fracionário.

A construção da curva mestre manualmente pode gerar ambiguidades quando diferentes autores realizam a identificação do mesmo fator de deslocamento. Nesse contexto, uma metodologia eficiente e que não apresenta tal dificuldade, é apresentada por Gergesova et al. (2010). Esta metodologia utiliza um processo de caracterização do fator de deslocamento, baseado num algoritmo denominado CFS (do inglês *Closed Form Shifting*). Tal técnica é fundamentada na superposição de várias curvas isotérmicas experimentais, onde busca-se a minimização da área entre duas curvas adjacentes experimentais. Saprunov, Gergesova e Emri (2014) amplia a metodologia e, utilizando os parâmetros característicos dos modelos constitutivos de relaxação (ou fluência), obtidos por trabalhos anteriores (EMRI et al., 2005; GERGESOVA et al., 2010), constrói várias curvas artificiais nas respectivas temperaturas de ensaio. Dessa forma, empregando o algoritmo CFS, os autores identificam com boa precisão, o fator deslocamento considerando o modelo WLF (proposto por Williams, Landel e Ferry (1955)). Deve-se realçar que os coeficientes

obtidos por Saprunov, Gergesova e Emri (2014) para o modelo WLF foram os mesmos para os módulos de fluência e de relaxação.

2.1.2 Caracterização via ensaios tensão-deformação do tipo destrutivo

Podem ser encontrados na bibliografia, vários estudos envolvendo ensaios tensão-deformação com o intuito de caracterizar o comportamento mecânico de MVEs como função da temperatura e da taxa de deformação. Entre estes, Bauwens, Bauwens-Crowete e Homes (1969) e Bauwens-Crowet (1973), utilizando ensaios tensão-deformação em várias temperaturas e sob diferentes taxas de deformação, estudam a tensão de escoamento do Policloreto de Polivinila (PVC) e do Polimetil-Metacrilato (PMMA). Nos trabalhos, são apresentados gráficos das tensões de escoamento para várias taxas de deformação e com diferentes temperaturas. Com isso, identificam-se os fatores de deslocamento utilizando os modelos WLF e Arrhenius (desenvolvido pelo pesquisador sueco Svante Arrhenius (1859 – 1927)). Nesses trabalhos, as taxas de deformação não ultrapassam o valor de $0,6[\text{mm/mm}]\text{s}^{-1}$.

No intuito de estudar o comportamento tensão-deformação sob altas taxas de deformação, Richeton et al. (2006), Zhao, Knauss e Ravichandran (2007) e Cao, Wan e Wang (2012) caracterizam materiais poliméricos com comportamento viscoelástico baseando-se em um método que utiliza a barra de Hopkinson. Nesta técnica, as propriedades mecânicas dos materiais (tais como tensão de escoamento, módulo de Young e parâmetros de modelos constitutivos) são caracterizadas em várias temperaturas. Nesta mesma linha, Serban, Weber e Marsavina (2013) conduz ensaios de tensão-deformação uniaxiais em diferentes polímeros. Para tanto, o autor realiza os experimentos em um equipamento servo-hidráulico em várias temperaturas. Os dados obtidos são agregados a um modelo material para simulações utilizando o Método de Elementos Finitos, por meio do *software Abaqus®*, considerando dependências da temperatura e da taxa de deformação.

Outro método de caracterização de MVEs é apresentado por Pacheco (2013). O trabalho apresenta uma metodologia para a caracterização de MVEs no domínio do tempo, considerando a influência da temperatura. Para isso, o trabalho utiliza séries de Prony e uma técnica híbrida de otimização baseada em Algoritmos Genéticos (AG) e Programação Não Linear (PNL). Como dados de entrada, são utilizados ensaios

experimentais tensão-deformação com diferentes taxas de deformação e temperaturas. O resultado final dessa caracterização é a obtenção das constantes relacionadas a cada termo da Série de Prony. Sousa (2015) amplia esta metodologia de caracterização e faz ajustes contemplando as influências da temperatura e/ou da pressão. Tal metodologia possibilita a caracterização de polímeros viscoelásticos que possuem comportamento termo, piezo e termopiezoreologicamente simples. Mais recentemente, Ciniello (2016) e Ciniello, Bavastri e Pereira (2016) utilizam a mesma metodologia de identificação, porém, utilizando o modelo constitutivo de Zener fracionário.

Na maioria das vezes, experimentos envolvendo tensão-deformação, sob taxas constantes de deformação, são difíceis de serem realizados, sobretudo devido às configurações da instalação experimental, a qual requer sistemas e equipamentos especiais (SAPRUNOV, GERGESOVA e EMRI, 2014). Apesar disso, grande quantidade de dados experimentais envolvendo tensão-deformação tem sido disponibilizada pelos fabricantes. Uma das fontes mais importantes é a base de dados CAMPUS® (*Computer Aided Material Pre-Selection by Uniform Standards*), fornecida pelos principais fabricantes de materiais poliméricos. Esta é uma base de dados que oferece comparações confiáveis de dados de diferentes materiais medidos de acordo com a norma padrão internacional e que está disponível livremente (CAMPUS, 2018).

2.2 CARACTERIZAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Como posto anteriormente, outra forma de caracterização dos MVEs é no domínio da frequência, considerando a influência da temperatura. Em meio aos vários métodos de identificação, podem-se citar as técnicas baseadas em oscilações livres ou forçadas e aquelas envolvendo métodos de propagação de ondas (FIGURA 1). Dentre elas, frisa-se que as técnicas que envolvem vibrações forçadas, embora mais complicadas, podem render alta reprodutibilidade, conduzindo ao progresso do conhecimento científico (WARD e SWEENEY, 2004). Isto posto, este trabalho estuda a caracterização de MVEs envolvendo vibrações forçadas que podem ser realizadas, entre outras formas, via DMA (do inglês *Dynamic Mechanical Analysis*) e ensaios de transmissibilidade.

2.2.1 Caracterização utilizando técnicas DMA

A técnica DMA tem se tornado comum em ambientes laboratoriais, como ferramenta de pesquisa para caracterizar MVEs no domínio da frequência. Ao longo dos últimos anos, inúmeros trabalhos fazem uso dessa técnica: He (2005), Chailleux et al.(2006), Barruetabeña et al. (2011), Guedes (2011), Rouleau et al. (2015), Gergesova, Saprunov e Emri (2016).

He (2005) realiza ensaios experimentais isotérmicos, obtendo várias curvas para os módulos de armazenamento e de perda em um curto intervalo de frequência. Nesse caso, identificam-se, manualmente, os fatores de deslocamento do modelo WLF, através da aplicação do PSTT. Assim, as curvas são construídas para os módulos dinâmicos e de perda numa determinada temperatura de referência, com intervalo de frequência bem mais amplo.

Barruetabeña et al. (2011) e Guedes (2011) constroem várias curvas isotérmicas experimentais dos módulos de armazenamento e de perda no domínio da frequência. Partindo do PSTT, os fatores de deslocamento são determinados e, com isso, identificam-se os modelos WLF e de Arrhenius. Na sequência, curvas para o módulo de armazenamento e para o fator de perda, na temperatura de referência, são construídas. Partindo dessas curvas, caracterizam-se modelos constitutivos tais como de Wiechert, Maxwell fracionário e derivada fracionária de quatro parâmetros.

Assim como para ensaios no domínio do tempo, a determinação manual do fator de deslocamento, no domínio da frequência, pode gerar ambiguidades. Nesse sentido, um método que não apresenta tal ambiguidade, é exposto nos trabalhos de Chailleux et al. (2006) e Rouleau et al. (2015), os quais constroem várias curvas experimentais isotérmicas no domínio da frequência. Para determinar as constantes do fator deslocamento, são utilizadas as relações de casualidade de Kramers-Kronig e, dessa forma, constrói-se a curva mestre. Por fim, tal curva é ajustada via dois modelos viscoelásticos, sendo eles: os modelos de Wiechert e o modelo de derivada fracionária de quatro parâmetros. Outro método de caracterização, sem ambiguidade, é apresentado no trabalho de Gergesova, Saprunov e Emri (2016) que utiliza o algoritmo CFS (GERGESOVA, 2010).

Nessa mesma linha, Balbino (2016) partindo de dados experimentais para o módulo complexo de Young em várias temperaturas, identifica de forma integrada os parâmetros viscoelásticos do módulo complexo de Young empregando o modelo de

derivada fracionária de quatro parâmetros, em associação com os modelos (equações) WLF e de Arrhenius.

2.2.2 Identificação utilizando ensaios de transmissibilidade

Partindo de experimentos de transmissibilidade, Lopes et al. (2004) identifica um modelo para o módulo complexo de cisalhamento baseado em cálculo fracionário e considerando a influência da temperatura. Para tanto, dados experimentais, em várias temperaturas de ensaio, são utilizados. A metodologia se baseia no conceito de problemas inversos e em uma técnica híbrida de otimização, através de um ajuste global de todas as curvas, simultaneamente. Nessa mesma linha, Medeiros (2010) amplia tal método e caracteriza o material utilizando, além do modelo de derivadas fracionária, o modelo proposto por Golla, Hughes e McTavish (GOLLA e HUGHES, 1985; MCTAVISH, 1988; MCTAVISH e HUGHES, 1993).

Ascensão (2012) implementa um método inverso de identificação de propriedades mecânicas de MVEs, baseado num modelo de elementos finitos e nas Funções Resposta em Frequência do tipo transmissibilidade. A identificação das propriedades mecânicas do MVE verte-se na obtenção dos quatro parâmetros do modelo constitutivo de derivada fracionária, por meio de ajuste de funções de transmissibilidade medidas experimentalmente e geradas pelo modelo de elementos finitos.

Souza (2015) caracteriza os efeitos dissipativos de MVEs, aplicados numa estrutura do tipo viga, no contexto de controle passivo de vibrações. Tal caracterização é realizada de acordo com o estabelecido pela norma ASTM-E756.

Recentemente, Olienick (2018) realiza ensaios de transmissibilidade e obtém dados experimentais envolvendo MVE no domínio da frequência e considerando influências da temperatura e efeitos da pré-carga. Com isso, o trabalho identifica de forma integrada os parâmetros viscoelásticos para o módulo complexo de Young considerando o modelo de Zener fracionário de quatro parâmetros em conjunto com efeitos da temperatura e da pré-carga.

2.3 MÉTODOS DE INTERCONVERSÃO

A interconversão entre os diferentes módulos dos MVEs, é uma importante ferramenta no estudo da viscoelasticidade. Conforme Christensen (1982), todas as

funções lineares viscoelásticas são matematicamente equivalentes, seja para carregamento uniaxial ou cisalhamento. No entanto, apesar de existirem expressões envolvendo integrais que relacionam as funções viscoelásticas, obter as soluções de forma exata não é trivial. Por esta razão, vários métodos alternativos de interconversão têm sido desenvolvidos. Alguns destes referem-se às interconversões da fluência para relaxação e outros são referentes à interconversão entre os domínios do tempo e da frequência.

2.3.1 Interconversão relaxação-fluência

Conforme Boltzman¹ (1876 *apud* HOPKINS; HAMMING, 1957), os módulos de relaxação e de fluência estão relacionados por integral de convolução. Visto isso, Hopkins e Hamming (1957) divide o intervalo relevante da integral em um número finito de subintervalos. A integral é resolvida aplicando a regra do trapézio a fim de obter o resultado da integração em cada subdomínio. Com isso, a partir da função fonte², calcula-se a função alvo³. Knoff e Hopkins (1972) melhora o método assumindo que tanto a função alvo, quanto a função fonte, é linear por partes no domínio da integração numérica. Mais adiante, Baumgaertel e Winter (1989) demonstra a conversão analítica do módulo de relaxação, para o módulo de fluência, usando transformadas de Laplace e o modelo de Wiechert.

Para os trabalhos acima, as soluções exatas são colocadas na forma de integrais num intervalo infinito. Isso torna complexa a avaliação, tanto de uma maneira analítica como numérica. Na prática, os dados experimentais estão disponíveis apenas para intervalos de tempo limitados. Além disso, um método pode funcionar de maneira adequada para a realização da interconversão para a fluência, mas não necessariamente para a interconversão reversa (PARK e SCHAPERY, 1999).

Uma metodologia que não apresenta essas desvantagens é discutida por Mead (1994) e Park e Schapery (1999). Os trabalhos apresentam um método numérico de interconversão entre os módulos de fluência e de relaxação, escritos em termos da Série de Prony, considerando que uma dessas funções seja conhecida. Os

¹ BOLTZMANN, L.. Zuer theorie der elastischen nachwirkungen. **Annalen der Physik und Chemie**, vol. 7, p. 430 - 432, 1876.

²O termo função fonte denota a função conhecida. Esta pode ser de fluência ou relaxação e, a partir dela, é possível obter a função alvo.

³ Função alvo denota a função que se deseja obter. Esta pode ser de fluência ou relaxação.

trabalhos mostram que a função alvo pode ser determinada de maneira direta e efetiva, sem a necessidade de encontrar raízes no domínio de Laplace.

Outra metodologia de interconversão é tratada por Honerkamp e Weese (1990). O trabalho discute que dados experimentais com ruídos podem causar grandes erros em interconversão numéricas, resultando matematicamente em problemas mal condicionados. Por exemplo, quando a função de relaxação é determinada através de dados experimentais e a interconversão é utilizada para obter o módulo de fluência, pequenos erros, na primeira função, podem causar grandes erros à função do módulo de fluência. Tais problemas podem ser resolvidos através de métodos de regularização, onde critérios adicionais são incluídos no problema. Mead (1994) e Ramkumar et al. (1997) aplicam métodos de regularização (tais como regressão linear, programação quadrática e de Tikhonov) nas interconversões e concluem que tais métodos são efetivos para diminuir o erro quando o espectro de relaxação for estimado a partir de dados com ruídos ou dados incompletos. Sorvari e Malinen (2007) aplicam o método de regularização de Tikhonov, num procedimento numérico, para avaliar o módulo de fluência, a partir de dados experimentais de relaxação com ruídos. Os resultados da interconversão são comparados com dados que não utilizaram tal método. Mais adiante, Zhu, Sun e Xu (2011) propõe método para determinar o módulo de relaxação a partir de ensaios de fluência baseado na equação de Volterra do segundo tipo e na regularização de Tikonov. A idéia do método é transformar a convolução numa equação de Volterra do segundo tipo a fim de reduzir a sensibilidade da interconversão.

Nota-se que a utilização do método de regularização de Tikhonov é uma técnica interessante, pois possibilita obter a função alvo diretamente. Neste caso, supondo a disponibilidade apenas de ensaios experimentais da função fonte, encontram-se dados "experimentais" da função alvo por meio do processo de regularização. Deste modo, não há necessidade da caracterização de modelo específico para interconversão e, com isso, o pesquisador pode identificar o modelo que melhor lhe convenha.

Cyr, Crochon e Lévesque (2013) apresenta um método analítico exato de interconversão para funções viscoelásticas lineares expressas como Séries de Prony. O algoritmo é baseado em equações termodinâmicas de processos irreversíveis. Como resultados, o método de interconversão pode ser aplicado a materiais sob ensaios unidimensionais e tridimensionais.

Recentemente, Loy (2015) apresenta um método de interconversão analítico, onde os coeficientes da função alvo (cisalhamento em fluência) são obtidos em termos da derivada da função fonte (relaxação de cisalhamento), no domínio de Laplace. O método foi validado via comparação de resultados com a metodologia proposta por Park e Schapery (1999).

Dentre os trabalhos apresentados nesta subseção, dois métodos se destacam. Inicialmente, o de Sorvari e Malinen (2007). Neste, partindo de dados experimentais de relaxação no domínio do tempo, utiliza-se o método numérico de regularização de Tikhonov e obtêm-se pontos experimentais "artificiais" para o módulo de fluência. A outra metodologia é o método analítico de Park-Schapery e de Loy et al. (2015) que apresenta um procedimento simples e direto que envolve interconversões (fluência-relaxação) utilizando os coeficientes das séries de Prony.

2.3.2 Interconversão tempo-frequência

Conforme já mencionado, as funções viscoelásticas no domínio do tempo possuem formas equivalentes no domínio da frequência. Essa propriedade é muito útil na prática, pois, nem sempre, é possível a realização de ensaios nos dois domínios. Nesse sentido, ao longo das últimas décadas, alguns autores têm dedicado esforços para encontrar relações simples e precisas de interconversão tempo-frequência. Como pioneiros, podem-se citar Ninomiya e Ferry (1959) e Schwarzl e Struik (1968). Esses trabalhos desenvolvem algoritmos de aproximações para os módulos de relaxação e de fluência, tendo por base dados experimentais dos correspondentes módulos complexos, no domínio da frequência.

Mead (1994) e Park e Schapery (1999) apresentam um método de interconversão da função módulo de relaxação, escrita em termos da série de Prony, do domínio do tempo para o domínio da frequência. A diferença é que Mead (1994) realiza a interconversão baseando-se em transformadas de Fourier. Por outro lado, Park e Schapery (1999) realiza a mesma interconversão através das transformadas de Laplace. Assim, é possível obter um modelo para o módulo complexo cuja parte real representa o módulo de armazenamento e a parte imaginária, o módulo de perda.

Fernandez, Rodrigues e Lamela (2011), utilizando DMA, realiza experimentos no domínio do tempo e da frequência. No tempo, são obtidos dados para as funções dos módulos de relaxação e de fluência. No domínio da frequência, são obtidos dados para o módulo complexo, de armazenamento e de perda. Dessa forma, utilizando a

interconversão apresentada por Mead (1994) e Park e Schapery (1999), o trabalho compara dados experimentais com os modelos obtidos por interconversão e obtém resultados promissores.

Mais adiante, Barruetabeña et al. (2013) apresenta um método de interconversão baseado nas transformadas de Fourier. Como resultado, o procedimento proposto permite a obtenção do módulo complexo por meio de testes de relaxação, bem como, permite a obtenção do módulo de relaxação a partir de ensaios envolvendo o módulo complexo. Categoricamente, o autor afirma que este método pode ser útil quando não é possível o ajuste do Modelo de Wiechert aos dados experimentais tanto para o domínio do tempo como para o da frequência.

Recentemente, Barrientos et al. (2018) obtém dados experimentais para o módulo de relaxação de Young e, utilizando o modelo generalizado de Maxwell, identifica o MVE empregando técnica de otimização. Na sequência, por interconversão obtém o módulo complexo de Young e o compara com dados experimentais obtidos no domínio da frequência. Os autores afirmam que os resultados possuem grande potencial de implementação em ambientes computacionais de elementos finitos.

2.4 IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO OU DA FREQUÊNCIA

Esta seção apresenta a revisão bibliográfica referente às identificações do coeficiente de Poisson nos domínios do tempo e da frequência. Em ambos os casos, a identificação pode ser feita de maneira direta ou indireta. De modo direto, o coeficiente de Poisson pode ser obtido a partir de medições das deformações diretamente na estrutura. Por outro lado, de modo indireto, o coeficiente de Poisson é obtido por meio de funções viscoelásticas, tais como de tração e de cisalhamento (TSCHOEGL; KNAUSS; EMRI, 2002).

2.4.1 Identificação do coeficiente de Poisson no domínio do tempo empregando o método direto

No intuito de identificar de modo direto o coeficiente de Poisson, definido no domínio do tempo, alguns trabalhos vêm sendo publicados ao longo dos últimos anos. Entre os quais, citam-se Ernst et al. (2003), Lakes e Wineman (2006), O'Brien, Sottos

e White (2007), Kassem, Grasley e Masad (2013), Yin, Duan e Zhou (2013), Aili et al. (2015) e Cui, Tang e Shen (2016).

Ernst et al. (2003) obtém o coeficiente de Poisson utilizando extensometria elétrica. Nesse caso, o trabalho realiza vários ensaios isotérmicos de fluência. Em seguida, identifica o fator de deslocamento utilizando um modelo polinomial, haja vista que o modelo WLF não se mostra apropriado para descrever a curva mestre de Poisson, pois o PSTT falha na construção da curva mestre do coeficiente de Poisson (as curvas não se sobrepõem de modo perfeito). Nesse ponto, o trabalho não é claro se a inconsistência é devido a não-acurácia dos resultados ou se o material não é termorreologicamente simples.

Note-se que a identificação do coeficiente de Poisson pode ser realizada também por meio de ensaios de relaxação. Nesse sentido, Lakes e Wineman (2006) estuda se existem diferenças entre os coeficientes de Poisson obtidos por meio de testes de relaxação ou de fluência. O trabalho infere que as diferenças são pequenas e, praticamente, não há grandes distinção. Nessa mesmo esforço, O'Brien, Sottos e White (2007) avalia o coeficiente de Poisson, neste caso, considerando a influência da temperatura. O trabalho mostra que a influência da temperatura é a mesma para os ensaios de fluência e relaxação. Portanto, considerando o PSTT, o fator de deslocamento pode ser o mesmo para os módulos de fluência e de relaxação.

Outro estudo importante é realizado por Kassem, Grasley e Masad (2013). O trabalho avalia se existem significativas diferenças, para o coeficiente de Poisson de MVEs, entre ensaios de tração e compressão. No trabalho, são descritos ensaios de relaxação em tração e relaxação em compressão. Nota-se que, nos testes de relaxação em tração, o coeficiente de Poisson aumenta com o tempo. Por outro lado, no caso do teste de relaxação em compressão, o coeficiente de Poisson, tem um leve crescimento durante os instantes iniciais e, logo após, permanece praticamente constante.

Yin, Duan e Zhou (2013) modela o coeficiente de Poisson, no domínio do tempo, para ensaios envolvendo taxas de deformação constante. Para tanto, o autor emprega modelos fracionários de Maxwell, Kelvin-Voigt e Zener. Partindo de propriedades de MVEs obtidas em trabalhos publicados anteriormente por outros autores, geram-se pontos experimentais artificiais e, na sequência, os parâmetros característicos dos modelos propostos para o coeficiente de Poisson são identificados.

Aili et al. (2015) estuda a diferença entre os coeficientes de Poisson em relaxação e em fluência. O trabalho infere que os valores iniciais, quando o tempo tende a zero, e os valores de equilíbrio, quando o tempo tende ao infinito, são iguais. Por outro lado, entre o tempo tendendo a zero e o tempo tendendo ao infinito, isto é, na região de transição ao longo do tempo, os dois módulos de Poisson possuem uma pequena diferença que segundo Aili et al. (2015) pode ser desconsiderada.

Recentemente, Cui, Tang e Shen (2016) investiga os efeitos do tempo, da temperatura, da percentagem de deformação longitudinal e da pré-carga no coeficiente de Poisson. Para o domínio do tempo, percebe-se que o coeficiente de Poisson é uma função monotônica crescente. Além disso, o coeficiente de Poisson aumenta com a temperatura e com a taxa de deformação longitudinal e decresce com a pré-carga.

2.4.2 Identificação do coeficiente de Poisson no domínio do tempo empregando o método indireto

A identificação indireta do coeficiente de Poisson, no domínio do tempo, é realizada por meio de funções viscoelásticas auxiliares (módulos de relaxação em tração e/ou cisalhamento). Vários trabalhos têm sido publicados nesse intuito, entre os mais relevantes pode-se citar Theocaris (1964), Tsou, Greener e Smith (1995), Ashrafi et al. (2008), Grassia e D'Amore (2008) e Chen et al. (2012).

Theocaris (1964) apresenta uma metodologia, na qual o coeficiente de Poisson no domínio do tempo é obtido a partir dos módulos de relaxação em tração, $E(t)$, e de fluência em cisalhamento, $J(t)$. Nesse caso, o trabalho obtém o coeficiente de Poisson utilizando a relação

$$\nu(t) = \frac{1}{2} \left[E_0 J(t) - 2 + \int_0^t \left(\frac{dE(t-\xi)}{d\xi} J(\xi) \right) d\xi \right], \quad (2)$$

sendo E_0 o módulo instantâneo quando o tempo tende a zero, $t \rightarrow 0$, e ξ uma variável auxiliar de integração no tempo. Para tanto, o autor avalia a integral de convolução através de um método numérico aproximado. Mais adiante, Tsou, Greener e Smith (1995) obtém o coeficiente de Poisson de maneira numérica por meio de ensaios de relaxação uniaxial e de flexão. No trabalho, são investigados dois materiais: policarbonato e acetato de celulose. O primeiro material possui um valor

constante para o coeficiente de Poisson. Para o segundo material, é obtida uma função parabólica com um ponto de máximo. Os autores, Tsou et al. (1995), afirmam que tais resultados precisam de mais investigações. Ademais, os experimentos foram realizados sem a influência da temperatura.

Ashrafi et al. (2008) apresenta uma metodologia para obter o coeficiente de Poisson considerando ensaios de relaxação e de fluência em tração. Para tal, o trabalho apresenta um modelo para o coeficiente de Poisson que depende do módulo volumétrico e da relaxação ou da fluência, ao longo do tempo. Nesse caso, para eliminar a integral de convolução e diminuir o tempo de processamento, o trabalho considera o módulo volumétrico constante e, com isso, identifica uma função viscoelástica para o coeficiente de Poisson, utilizando séries de Prony. O trabalho conclui que praticamente não há grandes distinções entre o coeficiente de Poisson obtido indiretamente por meio de testes de relaxação ou de fluência.

Grassia e D'Amore (2008) analisa analiticamente o coeficiente de Poisson no domínio do tempo. Para tanto, utilizando série de Prony com 1 termo é determinada uma função para o coeficiente de Poisson de forma indireta utilizando os módulos de relaxação em tração e volumétrico. Como resultado, infere-se que tal coeficiente pode ser monotônico crescente ou não monotônico, com um ponto de mínimo, o que contraria conceitos teóricos (TSCHOEGL, 1989; PRITZ, 1998; TSCHOEGL; KNAUSS; EMRI, 2002). Ademais, o trabalho não estende sua avaliação para um número maior de termos de Prony, o que, segundo Park and Schapery (1999), poderia resultar numa identificação mais precisa e acurada das funções viscoelásticas.

Chen et al. (2012) apresenta um método, no domínio do tempo, no qual inicialmente identificam-se os módulos de relaxação em cisalhamento e em tração, escritos em termos da série de Prony. Na sequência, o trabalho apresenta relações entre as propriedades dos módulos de relaxação, fluência e Poisson. Isso possibilita a obtenção dos parâmetros relativos aos módulos de fluência e do coeficiente de Poisson. Para a obtenção dos termos relativos ao coeficiente de Poisson, considera-se que o módulo volumétrico é constante.

Por esta sucinta revisão bibliográfica, nota-se que algumas metodologias demonstram dificuldades para identificar indiretamente a função viscoelástica do coeficiente de Poisson, definida no domínio do tempo. Nos trabalhos citados, a obtenção do coeficiente de Poisson é realizada de forma numérica, o que pode tornar o processo muito oneroso computacionalmente e pouco preciso. Ademais, para

eliminar essa dificuldade, algumas das metodologias citadas sugerem que o módulo volumétrico seja constante, o qual, segundo Tschoegl (1989), Pritz (1998) e Emri e Prodan (2006), na prática, se mostra variável.

2.4.3 Identificação do coeficiente de Poisson no domínio da frequência: Método direto

A obtenção da função coeficiente de Poisson, no domínio da frequência, empregando métodos diretos, ocorre através da medição direta na estrutura das deformações transversais e longitudinais. Nesse intuito, alguns estudos têm sido apresentados nos últimos anos, entre os quais citam-se Pritz (1998), Pritz (2000) e Graziani, Bocci e Canestrari (2014).

Pritz (1998) estuda o coeficiente de Poisson no domínio da frequência diretamente. O trabalho mostra que a parcela real do módulo complexo de Poisson decresce e que o fator de perda possui comportamento parabólico com pelo menos um ponto de máximo.

Posteriormente, Pritz (2000) investiga o coeficiente de Poisson no domínio da frequência. O trabalho aponta que o método direto baseado na medição das amplitudes das deformações lateral e axial e o ângulo de fase entre eles permite determinar o coeficiente de Poisson dinâmico com bastante precisão, mas apenas em uma faixa de frequência restrita. Em contraste, a determinação do fator de perda de Poisson por este método requer tão alta precisão de medir o ângulo de fase, o que é difícil, se não impossível, obter em alguns intervalos de frequência.

Graziani, Bocci e Canestrari (2014), avalia a influência da frequência, da temperatura e do nível de deformação no coeficiente de Poisson, empregando o método direto de identificação. Os resultados evidenciam que a função viscoelástica de Poisson é complexa em função da frequência e da temperatura, em que o valor absoluto do coeficiente complexo de Poisson decresce ao longo da frequência e é crescente para temperaturas crescentes.

2.4.4 Identificação do coeficiente de Poisson no domínio da frequência: Método indireto

A identificação do coeficiente complexo de Poisson, no domínio da frequência, pelo método indireto, ocorre através da construção e avaliação de funções

viscoelásticas auxiliares, como os módulos complexos de Young, volumétrico ou de cisalhamento. Esta metodologia se mostra pouco explorado pelos pesquisadores ao longo das últimas décadas (Philippoff e Brodnyan 1955; Koppelman 1959; Thomson 1966; Waterman 1977; Pritz 1998; Pritz 2000; Pritz 2007; Chen et al. 2017).

Um dos trabalhos pioneiros neste tema é Philippoff e Brodnyan (1955), o qual obtém o coeficiente de Poisson, inicialmente, através dos módulos complexos de Young e de cisalhamento e, na sequência, por meio dos módulos complexos de Young e volumétrico. Como resultados, são obtidas diferentes funções para o coeficiente de Poisson.

Koppelman (1959) realiza experimentos no domínio da frequência, variando na faixa de 10^{-5} e 10^{-1} Hz, e considerando a influência da temperatura, a qual varia entre 20°C e 100°C, para os módulos complexos de Young e de cisalhamento. Essa faixa de temperatura envolve a região vítrea do material (polimetil metacrilato). Nos experimentos, o coeficiente de Poisson flutua em torno do valor médio 0,31. No entanto, nenhuma análise é realizada na região borrachosa, o que dificulta a adequada identificação do coeficiente de Poisson.

Posteriormente, Thomson (1966) utiliza dados experimentais da literatura para os módulos complexos de Young e de cisalhamento e calcula ponto a ponto o coeficiente complexo de Poisson, cuja parcela real é uma função não monotônica no domínio da frequência. No entanto, Waterman (1977) and Pritz (1998) mostram matematicamente e com evidências experimentais, que a parcela real do coeficiente complexo de Poisson é decrescente monotonicamente, o fator de perda possui pelo menos um ponto de máximo e a parcela imaginária tem fortes indícios de ser negativa, considerando materiais poliméricos.

Pritz (2000) sugere que o método mais efetivo de determinar o módulo complexo do coeficiente de Poisson, utilizando o método indireto e em amplo intervalo de frequência, é a partir da medição dos módulos complexos de cisalhamento e volumétrico. Pritz (2007) realiza um estudo teórico e experimental do fator de perda do coeficiente de Poisson para MVEs lineares. Como resultado, o autor mostra que a magnitude desse fator é aproximadamente proporcional à diferença entre o módulo de cisalhamento e o volumétrico. Além disso, mostra-se que o fator de perda do Poisson é inferior ao fator de perda do módulo de cisalhamento.

Recentemente, Chen et al. (2017) obtém dados experimentais para os módulos dinâmicos em tração e em cisalhamento e, através do modelo viscoelástico

fracionário de Prony, obtém as funções para o coeficiente de Poisson e módulo complexo volumétrico. Uma importante premissa nesse trabalho é o fato de considerar o módulo volumétrico como constante no domínio do tempo.

Por esta sucinta revisão bibliográfica, nota-se que algumas metodologias demonstram dificuldades para identificar indiretamente a função viscoelástica do coeficiente complexo de Poisson. Alguns trabalhos sugerem que o mesmo seja obtido através dos módulos de cisalhamento e volumétrico. No entanto, a obtenção do módulo complexo volumétrico requer custos elevados e aparatos complexos (FILLERS; TSCHOEGL, 1977; TSCHOEGL; KNAUSS; EMRI, 2002; EMRI; PRODAN, 2006). Outras metodologias sugerem que o módulo volumétrico seja tomando como constante, o que, segundo Tschoegl (1989), Pritz (1998) e Emri e Prodan (2006), na prática, se mostra variável.

2.5 PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES

A partir de experimentos envolvendo MVEs, nos domínios do tempo e da frequência e em diversas temperaturas, entre as principais contribuições do corrente trabalho para o estado da arte podem-se citar:

- Proposta de uma metodologia integrada de identificação de funções viscoelásticas no domínio da frequência: Módulos complexos de Young, de cisalhamento, volumétrico e coeficiente complexo de Poisson;
- Proposta de uma metodologia integrada de identificação das funções viscoelásticas definidas no domínio do tempo: módulo de relaxação de Young, módulo de relaxação de cisalhamento e coeficiente de Poisson;
- Proposta de um modelo constitutivo para o coeficiente de Poisson definido no domínio do tempo;
- Proposta de uma metodologia de interconversão baseada na simples substituição de parâmetros viscoelásticos identificados nas funções viscoelásticas requeridas (seja interconversão tempo-frequência bem como relaxação-fluência), utilizando o modelo de Zener fracionário;
- Proposta de um nomograma para o coeficiente complexo de Poisson, definido no domínio da frequência;
- Proposta de nomogramas, no domínio do tempo, para os módulos de relaxação de Young, de cisalhamento e para o coeficiente de Poisson.

Deve ser realçado que, em todas as situações aqui descritas, os MVEs são assumidos como homogêneos, lineares e termorreologicamente simples. Ademais, para os domínios do tempo e da frequência, as funções viscoelásticas identificadas podem ser preditas em intervalos estendidos de tempo e/ou frequência, empregando o princípio da superposição tempo-temperatura.

Nesse contexto, para a adequada implementação das contribuições supracitadas, faz-se necessário o entendimento completo de conceitos teóricos bem como dos métodos propostos para tal. Esses são os temas centrais dos próximos capítulos.

3 REVISÃO CONCEITUAL

Este capítulo inicia com uma breve revisão da literatura sobre polímeros, desde os conceitos básicos, as classificações mais relevantes e a influência da temperatura no seu comportamento mecânico viscoelástico, considerando os domínios do tempo e da frequência. Para descrever o comportamento mecânico viscoelástico, são discutidas algumas funções viscoelásticas definidas nos domínios do tempo, da frequência e no domínio de Laplace. O capítulo é finalizado apresentando uma breve revisão sobre a metodologia para identificação híbrida de otimização, a qual é útil para a identificação dos parâmetros das funções viscoelásticas.

3.1 CONCEITO DE POLÍMERO

Conforme Canevarollo (2007), a palavra polímero origina-se do grego poli (muitos) e mero (unidade de repetição). Assim, o polímero é uma macromolécula composta por muitas unidades de repetição, denominadas meros, unidas por ligações primárias fortes, ditas intramoleculares, normalmente do tipo covalente. De acordo com Bovey (1979) e Canevarollo (2007), existem diferentes formas de classificar os polímeros. Entre elas, pode-se citar as classificações de acordo a composição da cadeia (copolímeros), estrutura molecular, forma como as cadeias se organizam numa macro escala, entres outras classificações.

3.1.1 Copolímeros

Segundo Canevarolo (2007) e Brinson e Brinson (2008), os copolímeros são polímeros que apresentam mais de um tipo de mero na cadeia polimérica. Em função do modo de distribuição dos diferentes meros dentro da cadeia polimérica, os copolímeros podem ser classificados conforme posto na TABELA 1. Neste caso, assume-se A e B como duas representações simplificadas de cada mero.

3.1.2 Configuração molecular

Segundo Bovey (1979), Ebewele (2000), George (2004) e Brinson e Brinson (2008), as cadeias poliméricas podem ser classificadas como:

- **Lineares:** as cadeias poliméricas são constituídas apenas de uma cadeia principal (FIGURA 2a). Neste caso, entre as cadeias podem haver muitas ligações de Van der Waals e de hidrogênio. Alguns polímeros comuns que se formam com estruturas lineares são o polietileno, o PVC, o nylon e os fluorcarbonetos.
- **Ramificadas:** possuem pequenos ramos ligados à cadeia principal do polímero (FIGURA 2b). As ramificações são consideradas como parte da molécula da cadeia principal. Estas podem resultar de reações paralelas que ocorrem durante a síntese do polímero. Quanto mais ramificações, menor é a massa específica (densidade) do polímero. Um exemplo é o Polietileno de Alta Densidade (PEAD), o qual é primariamente um polímero linear. Por outro lado, o Polietileno de Baixa Densidade (PEBD) possui cadeias carbônicas ramificadas e, por isso, sua densidade é menor.
- **Com ligações cruzadas:** as cadeias lineares estão unidas umas às outras em várias posições por meio de ligações covalentes (FIGURA 2c). O processo de formação de ligações cruzadas é conseguido durante a síntese do polímero ou por meio de uma reação química irreversível.

TABELA 1 - CLASSIFICAÇÃO DOS COPOLÍMEROS

Copolímero	Representação simplificada	Exemplo
Em bloco: há a formação de grandes sequências (blocos) de um dado mero se alternando com outras grandes sequências de outro mero	~SSS~BBB~SSS~BBB~	Borracha termoplástica tribloco de estireno e butadieno (SBS) ou isopreno (SIS).
Aleatório: não há uma sequência definida de disposição dos diferentes meros.	~A-B-B-A-B-A-A-A-B-B-A~	Borracha sintética de estireno e butadieno
Enxertado: neste caso, sobre a cadeia do homopolímero (poliA) liga-se covalentemente outra cadeia polimérica (poliB).	$ \begin{array}{c} \sim A-A-A-A \sim \\ \\ B \\ \\ B-B-B-B \sim \end{array} $	Acrilonitrila-Butadieno-Estireno (ABS)

FONTE: Canevarolo (2007).

FIGURA 2 - EXEMPLO DAS ESTRUTURAS DE POLÍMEROS LINEARES, RAMIFICADOS E ENTRECRUZADOS.



FONTE: O autor (2017).

Nos polímeros lineares e nos ramificados, as moléculas podem deslizar umas sobre as outras quando a energia térmica fornecida ultrapassa a energia das forças intermoleculares. Em contrapartida, nos polímeros com ligações cruzadas, as cadeias estão unidas covalentemente, formando uma rede no espaço tridimensional, de modo que a sua separação por meio de fornecimento de calor, implica em degradação do material polimérico (GEORGE, 2004; BOWER, 2002).

Os estudos sobre as estruturas moleculares (lineares, ramificadas e com ligações cruzadas) dos polímeros dão base para o entendimento da classificação dos polímeros quanto a sua estrutura física. Conforme Brinson e Brinson (2008), os polímeros geralmente são classificados em dois grandes grupos, sendo eles, os termoplásticos e os termofixos (FIGURA 3).

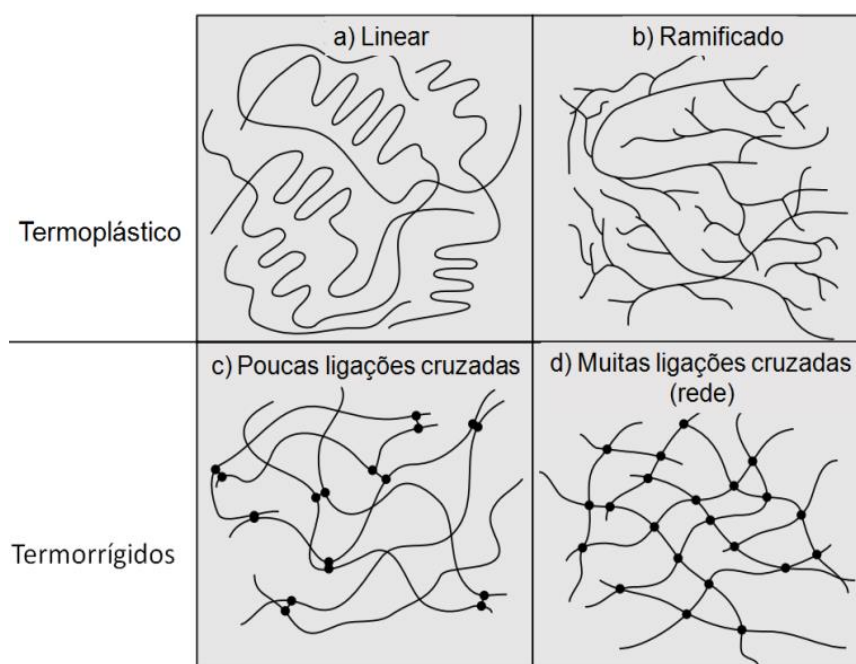
3.1.3 Classificação dos polímeros termoplásticos e termofixos

Os polímeros termoplásticos são aqueles designados como lineares e ramificados (FIGURA 3a; FIGURA 3b). Neste caso, como as moléculas podem deslizar umas sobre as outras, esses polímeros podem ser amolecidos ou endurecidos, repetidas vezes, quando fornecido ou retirado calor, respectivamente, sem perder suas propriedades (CALLISTER, 2001; GEORGE, 2004; BRINSON E BRINSON, 2008). Como exemplo de polímero termoplástico citam-se PEBD e o PEAD.

Os polímeros termofixos são os que contém ligações cruzadas. Estes são maleáveis apenas no momento de sua fabricação, não sendo possível remodelá-los devido ao processo de degradação. Isso acontece porque suas macromoléculas formam ligações entrecruzadas em todas as direções do espaço, formando uma rede tridimensional chamada de reticulado. O rompimento destes reticulados resulta na degradação do material (BRINSON e BRINSON, 2008). Além disso, a densidade de ligações cruzadas também exerce grande influência sobre o comportamento físico do material. Como exemplos citam-se os elastômeros, constituídos por cadeias enoveladas, interligadas em pontos distantes (FIGURA 3c). No estado sólido, quando submetidas a esforço de estiramento, as moléculas dos elastômeros se “desenrolam”, permitindo elevados níveis de extensão. Quando a tensão é retirada, o polímero volta ao estado inicial, sem deformação residual. Este comportamento, característico do estado borrachoso, só é possível porque os pontos de entrecruzamento não permitem o deslizamento irreversível de uma cadeia em relação à outra. Por outro lado, se as

ligações cruzadas estiverem muito próximas, o material se torna rígido, sem elasticidade, devido às cadeias estarem muito presas, sem possibilidade de movimentação (FIGURA 3d). Como exemplo, menciona-se a resina fenol-formaldeído, mais conhecida como baquelita. Entre outras finalidades, a baquelita é empregada na fabricação de cabos de painéis, já que não derrete sob ação do calor (AKCELRUD, 2007).

FIGURA 3 - ESTRUTURAS MOLECULARES NOS POLÍMEROS TERMOPLÁSTICOS E TERMOFÍXOS.



FONTE: Adaptado de Brinson e Brinson (2008).

Com base na gama de escalas de tempo e temperatura que descrevem os vários rearranjos configuracionais das cadeias, infere-se que os polímeros possuem comportamento entre o elástico e o viscoso, ou seja, viscoelástico. Isso dependerá da temperatura em que o polímero se encontra. Esse é o tema central da próxima seção.

3.1.4 Efeito da temperatura em polímeros

A temperatura influencia consideravelmente o comportamento mecânico de polímeros viscoelásticos tendo em vista que, quando em temperaturas baixas, esses podem ser duros e rígidos como vidros sólidos e, quando em temperaturas mais elevadas, podem se apresentar flexíveis como borracha ou um líquido viscoso.

Conforme Chanda e Roy (2006), o polímero se comporta de forma vítrea quando está abaixo de uma temperatura denominada temperatura de transição vítrea,

denotada T_g . Nela, os movimentos das cadeias carbônicas do material praticamente cessam seus movimentos dando origem a uma consistência vítrea. O comportamento borrachoso ocorre entre a T_g e a T_m . Nesse caso, T_m é definida como temperatura de fusão, a partir da qual o material passa do estado borrachoso para o líquido viscoso.

Matematicamente, as características acima descritas podem ser interpretadas como alterações no módulo de relaxação do material, caracterizando-o como função da **temperatura**, T , do **tempo**, t , ou da **frequência**, Ω , ou seja, $E(T, t)$ ou $E(T, \Omega)$. Uma ilustração desse módulo, para o domínio do tempo, é apresentada na FIGURA 4 para um polímero termofixo, denominado epóxi modificado. Nessa figura, podem ser visualizadas algumas curvas de relaxação para temperaturas que variam de 70°C a 120°C. Observa-se que a magnitude do módulo diminui com o tempo e que as curvas se deslocam para menores valores de $E(T, t)$ com o aumento da temperatura. Para prever esta propriedade, é comum na bibliografia (PARK, 2001; O'BRIEN, MATHER e WHITE, 2001; POOLER, 2001; BRINSON E BRINSON, 2008; LAKES, 2004) o uso de uma curva mestre, que pode ser usada como referência para prever comportamentos em outras temperaturas.

Conforme Lakes (2004), a relação entre cada registro de tempo, t , ou de frequência, Ω , numa temperatura, T , pode ser deslocado para temperatura de referência, T_0 , de acordo com

$$t_r = t / \alpha_T(T, T_0) \quad \text{ou} \quad \Omega_r = \alpha_T(T, T_0) \Omega, \quad (3)$$

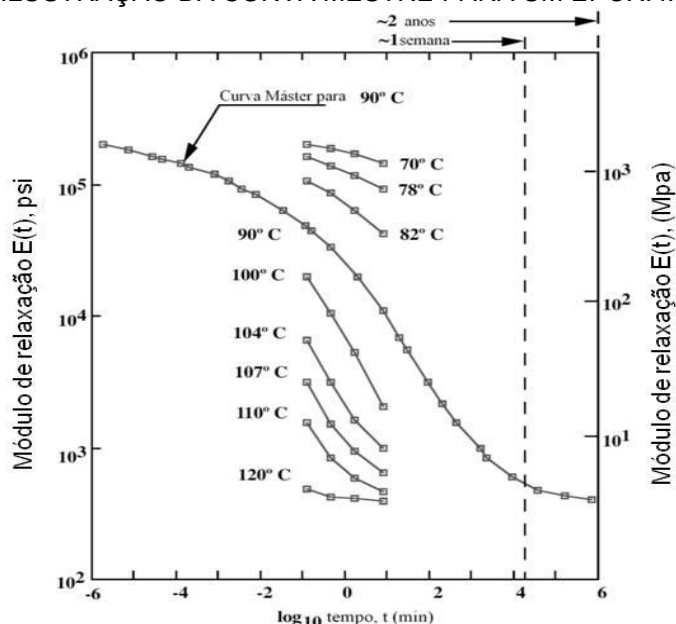
onde t_r é o tempo reduzido e Ω_r é a frequência reduzida (NASHIF et al., 1985; LAKES; CAPODAGLI, 2008). Ademais, neste caso, $\alpha_T(T, T_0)$ é uma função que representa o fator de deslocamento de temperatura. Esse fator pode ser determinado tomando a relação entre o tempo de relaxação na temperatura T , $\tau(T)$, e o tempo de relaxação numa temperatura T_0 , $\tau(T_0)$, na forma

$$\alpha_T(T, T_0) = \frac{\tau(T)}{\tau(T_0)}. \quad (4)$$

Esse valor fornece a medida do quanto a curva $E(T, t)$, ou $E(T, \Omega)$, é deslocada ao longo do eixo t partir da curva $E(T_0, t_{red})$, definida na temperatura de referência T_0 . A esse princípio é dado o nome de princípio da superposição tempo-temperatura

(PSTT) e, quando for aplicável para dado material, este é dito termorreologicamente simples.

FIGURA 4 - ILUSTRAÇÃO DA CURVA MESTRE PARA UM EPÓXI MODIFICADO



FONTE: Adaptado de Brinson e Brinson (2008).

Conforme Sousa (2015) existem vários modelos que buscam descrever o fator de deslocamento. Como exemplos podem ser citados os modelos de Goldstein, de Bestul-Chang, de Arrhenius, de Williams-Landel-Ferry (WLF) etc.. Entre os mais eficientes para descrever o fator de deslocamento é o modelo WLF, o qual tem sido empregado em diversos trabalhos científicos ao longo dos últimos anos (ERNST et al. 2003; PACHECO, 2013; ROULEAU et al., 2015; SOUSA, 2015, CUI; TANG; SHEN, 2016; CINIELLO, 2017). Esse modelo é descrito como mais na seguinte seção.

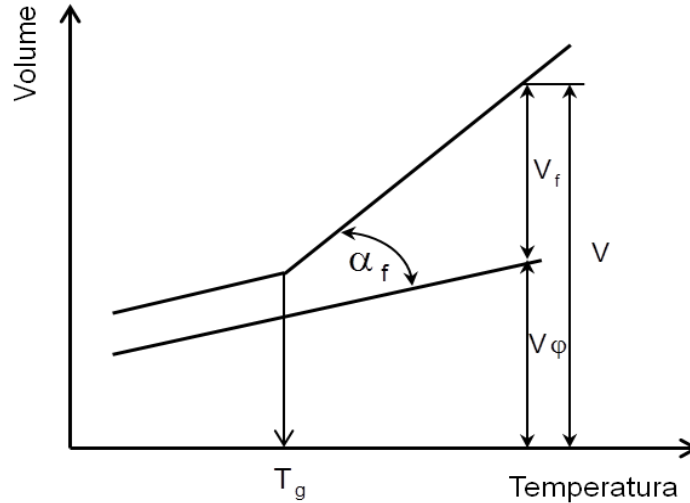
3.1.4.1 Modelo de Williams-Landel-Ferry (WLF)

O modelo para o fator deslocamento de WLF é baseado no conceito de volume livre. Este é definido como aquele volume constituído pelos espaços vazios não preenchidos pelas moléculas de um fluido. Segundo Doolittle e Doolittle (1957), a viscosidade η depende da distribuição dos espaços vazios no fluido e pode ser dada por

$$\eta = Ae^{B\left(\frac{V_f}{V_f}\right)} = Ae^{B\left(\frac{V-V_f}{V_f}\right)} = Ae^{B\left(\frac{1}{f}-1\right)}, \quad (5)$$

onde A e B são constantes empíricas características do fluido, V_ϕ é o volume ocupado pelas moléculas do fluido e V_f é o volume livre. Dessa forma, o volume total do fluido é $V = V_f + V_\phi$ e a fração de volume livre é dada por $f = V_f / V$. Uma ilustração desses conceitos é apresentada na FIGURA 5.

FIGURA 5 - DIAGRAMA VOLUME VERSUS TEMPERATURA PARA MATERIAL POLIMÉRICO AMORFO



FONTE: Adaptado de Brinson e Brinson (2008).

A equação (5) é válida apenas para líquidos compostos de pequenas moléculas. Williams et al. (1955) adapta seu uso para polímeros e relaciona as viscosidades com os tempos de relaxação, na forma

$$\frac{\eta(T)}{\eta(T_0)} = \frac{\tau(T)}{\tau(T_0)} = e^{B \left[\frac{1}{f} - \frac{1}{f_0} \right]}, \quad (6)$$

onde η é a viscosidade, B uma constante empírica do material e $\tau(T)$ e $\tau(T_0)$ são os tempos de relaxação nas temperaturas, T e T_0 , respectivamente. Além disso, f_0 é a fração de volume livre do material na temperatura de referência T_0 .

Recorrendo a essa proporcionalidade, o fator de deslocamento de temperatura $\alpha_T(T, T_0)$, definido em relação à temperatura T_0 e apresentado na equação (4), pode ser reescrito como

$$\alpha_T(T, T_0) = \frac{\tau(T)}{\tau(T_0)} = e^{B \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{f_0} \right)}. \quad (7)$$

Simplificando a equação (7), tem-se

$$\log \alpha_T = (\log e) B \left[\frac{1}{f} - \frac{1}{f_0} \right] \quad (8)$$

ou

$$\log \alpha_T = \frac{B}{2,303} \left[\frac{1}{f} - \frac{1}{f_0} \right]. \quad (9)$$

A equação (9) serve de base para o desenvolvimento das funções de deslocamento de temperatura apoiadas no conceito de volume livre.

Williams, Landel e Ferry (1955) modela o efeito da temperatura sobre o comportamento mecânico de polímeros amorfos, considerando que a fração de volume livre (f) varia linearmente com a temperatura, na forma

$$f = f_0 + \alpha_f (T - T_0), \quad (10)$$

onde α_f é o coeficiente de expansividade da fração de volume decorrente da variação de temperatura. Assim, com base nas equações (9) e (10), tem-se que

$$\log \alpha_T = - \frac{\left[\frac{B}{2,303 f_0} \right] (T - T_0)}{\frac{f_0}{\alpha_f} + T - T_0}. \quad (11)$$

Escrevendo esta expressão em uma forma mais compacta, tem-se

$$\log \alpha_T = - \frac{C_1^T (T - T_0)}{C_2^T + (T - T_0)}, \quad (12)$$

onde $C_1^T = B/(2,303 f_0)$ e $C_2^T = f_0/\alpha_f$, em que C_1^T e C_2^T são constantes características de cada material. A equação (12) é denominada equação WLF, pois foi desenvolvida pelos pesquisadores Malcolm L. Williams, Robert F. Landel e John D. Ferry. Esta equação pode ser utilizada para descrever o efeito da temperatura no comportamento de polímeros no domínio do tempo e da frequência.

3.2 COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO DE POLÍMEROS

Esta seção discute comportamentos viscoelásticos tais como de fluência e de relaxação. Na sequência, para descrever esses comportamentos, apresenta-se o princípio da superposição de Boltzmann, o qual é um modelo constitutivo que descreve a relação tensão-deformação no domínio do tempo. Discute-se também o

comportamento físico do coeficiente de Poisson. A seção encerra com a introdução à viscoelasticidade fracionária.

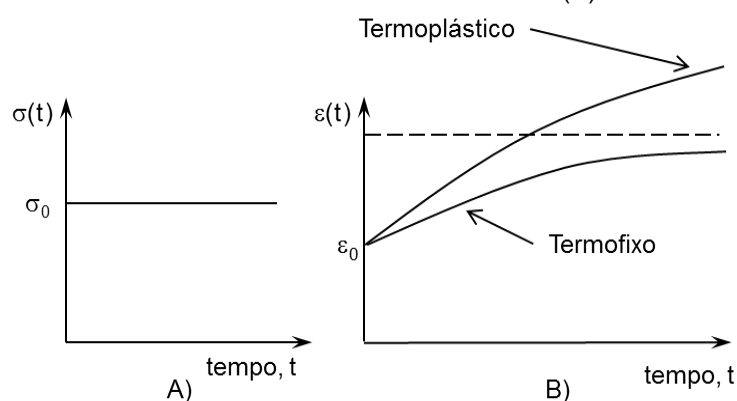
3.2.1 Fluência e relaxação

Findley, Lay e Onaran (1976) e Brinson e Brinson (2008) descrevem a fluência como uma deformação lenta e contínua de um material ao longo do tempo, quando este é submetido a carregamento que provoque estado de tensão constante. Considere-se uma função que relaciona deformação ao longo do tempo $\varepsilon(t)$, com a tensão inicial aplicada σ_0 . Tal função, denominada de **módulo de fluência uniaxial**, $D(t)$, é dada por

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}. \quad (13)$$

Para um polímero termofixo, durante um ensaio de fluência, a deformação crescente tende para um valor constante após um longo intervalo de tempo. Por outro lado, para um polímero termoplástico, a deformação continua a crescer tendendo à fratura (FIGURA 6).

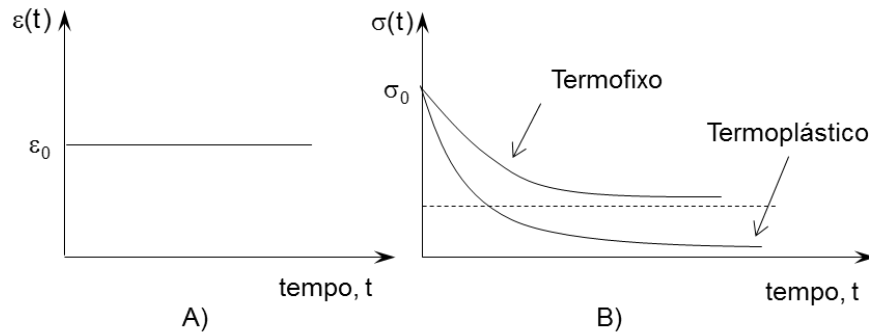
FIGURA 6 - ENSAIO DE FLUÊNCIA. CURVA DE TENSÃO (A) E DE DEFORMAÇÃO (B)



FONTE: O autor (2018).

Por outro lado, durante ensaios de relaxação, uma deformação constante ε_0 é aplicada ao material. Em teoria, o material é instantaneamente deformado para uma nova posição e rigidamente fixado, de modo que essa deformação permaneça constante durante a realização do teste (FIGURA 7).

FIGURA 7 - TESTE DE RELAXAÇÃO. CURVA DE DEFORMAÇÃO (A) E DE TENSÃO (B)



FONTE: O autor (2017).

De acordo com Brinson e Brinson (2008), quando um MVE é carregado nessa configuração, a tensão $\sigma(t)$ necessária para manter essa deformação constante diminui no decorrer do tempo, tendendo a zero para um termoplástico ideal, ou a um valor constante não-nulo para um termofixo (FIGURA 7). A função que relaciona a tensão ao longo do tempo $\sigma(t)$, com a deformação inicial aplicada ε_0 , é denominada **módulo de relaxação de Young $E(t)$** e é dada por

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}. \quad (14)$$

As equações (13) e (14) descrevem o comportamento de MVEs envolvendo ensaios de carregamentos uniaxiais. Expressões análogas podem ser definidas para ensaios envolvendo cisalhamento puro. Assim, define-se o **módulo de fluência de cisalhamento, $J(t)$** , como

$$J(t) = \frac{\gamma(t)}{\tau_0}, \quad (15)$$

em que τ_0 é a tensão de cisalhamento inicial aplicada e $\gamma(t)$ é a função deformação de cisalhamento no tempo. Ademais, pode-se definir o **módulo de relaxação de cisalhamento, $G(t)$** , como

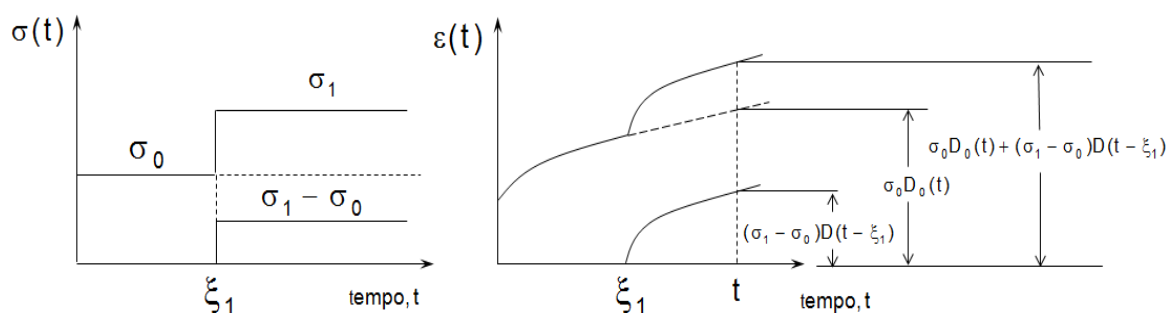
$$G(t) = \frac{\tau(t)}{\gamma_0}, \quad (16)$$

onde γ_0 é a deformação inicial aplicada e $\tau(t)$ é a função tensão de cisalhamento no tempo.

3.2.2 Princípio da superposição de Boltzmann

O Princípio da Superposição de Boltzmann supõe que, no instante de tempo $t=0$, a tensão, σ_0 , é aplicada ao corpo de prova de um MVE e, posteriormente, num instante $t = \xi_1$, uma tensão adicional ($\Delta\sigma_1 = \sigma_1 - \sigma_0$) é aplicada. A deformação total no material num instante de tempo t , subsequente a ξ_1 , é dada pela soma das deformações decorrentes das duas tensões, como se as tensões σ_0 e $(\sigma_1 - \sigma_0)$ estivessem atuando separadamente (FIGURA 8). Segundo Boltzman⁴ (1876 *apud* HOPKINS, HAMMING, 1957) e Findley et al. (1976), a esse fato é dado o nome de Princípio da Superposição de Boltzmann e, se o MVE é linear, esse princípio pode ser aplicado.

FIGURA 8 - REPRESENTAÇÃO DO COMPORTAMENTO VISCOELÁSTICO LINEAR. SOMATÓRIO DE DEFORMAÇÕES NA FAIXA LINEAR RESULTANTE DE APLICAÇÕES CONSECUTIVAS DE TENSÕES



FONTE: O autor (2018).

Em um formato generalizado, supõe-se que a variável de entrada (tensões) possa ser representada por uma série de degraus $\Delta\sigma_i = \sigma_i - \sigma_{i-1}$, com cada qual começando em diferentes tempos ξ_i . Assim, o histórico de tensões pode ser representado pelo somatório de funções degrau na forma

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) + (\sigma_1 - \sigma_0) H(t - \xi_1) + \dots + (\sigma_n - \sigma_{n-1}) H(t - \xi_n), \quad (17)$$

onde $H(t)$ é a função de *Heaviside*, definida como

⁴ BOLTZMANN, L.. Zuer theorie der elastischen nachwirkungen. **Annalen der Physik und Chemie**, vol. 7, p. 430 - 432, 1876.

$$H(t - \xi_i) = \begin{cases} 1, & \text{para } t \geq \xi_i, \\ 0, & \text{para } t < \xi_i. \end{cases} \quad (18)$$

O Princípio da Superposição de Boltzmann estabelece que cada um dos carregamentos contribui de forma independente para a deformação final, o que caracteriza o MVE como linear. Assim, a deformação total $\varepsilon(t)$ pode ser obtida pela adição de todas as contribuições na forma

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t) H(t) + \sum_{i=1}^n D(t - \xi_i) H(t - \xi_i) (\sigma_i - \sigma_{i-1}). \quad (19)$$

Multiplicando e dividindo cada incremento da equação (19) por $\Delta\xi$ e considerando $\Delta\xi$ tendendo a zero e n tendendo ao infinito, tem-se que a deformação total, para $t \geq 0$, pode ser escrita como (BRINSON E BRINSON, 2008)

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t) + \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta\xi \rightarrow 0}} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[D(t - \xi_i) H(t - \xi_i) \frac{(\sigma_i - \sigma_{i-1})}{\Delta\xi} \Delta\xi \right] \right\}. \quad (20)$$

Conforme os limites acima, a deformação total no instante t pode ser expressa em uma representação integral como

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 D(t) + \int_0^t D(t - \xi) \frac{d\sigma(\xi)}{d\xi} d\xi. \quad (21)$$

Supondo que a tensão inicial σ_0 tende a zero, tem-se

$$\varepsilon(t) = \int_0^t D(t - \xi) \frac{d\sigma(\xi)}{d\xi} d\xi. \quad (22)$$

A equação (22) corresponde à integral hereditária da fluência e pode ser aplicada para descrever o histórico de deformação, $\varepsilon(t)$, a partir de um histórico de tensões, $\sigma(t)$, considerando que o módulo de fluência, $D(t)$, seja conhecido.

De maneira análoga, é possível obter uma expressão relacionando a tensão, $\sigma(t)$, com a deformação, $\varepsilon(t)$, em um corpo que experimentou um histórico de deformação contínua $\varepsilon(t)$. Nesse caso,

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \xi) \frac{d\varepsilon(\xi)}{d\xi} d\xi. \quad (23)$$

A equação (23) é utilizada para descrever a tensão sob determinados históricos de deformação.

Analogamente, em ensaios com cisalhamento puro, podem ser obtidas expressões relacionando deformação de cisalhamento, $\gamma(t)$, com tensão de cisalhamento, $\tau(t)$, em um corpo que experimentou um histórico de tensão de cisalhamento contínuo, na forma de integral hereditária como

$$\gamma(t) = \int_0^t J(t - \xi) \frac{d\tau(\xi)}{d\xi} d\xi. \quad (24)$$

Ainda, é possível obter uma expressão relacionando a tensão de cisalhamento, $\tau(t)$, com a deformação de cisalhamento, $\gamma(t)$, em um corpo que experimentou um histórico de deformação de cisalhamento contínuo $\gamma(t)$, na forma de integral hereditária como

$$\tau(t) = \int_0^t G(t - \xi) \frac{d\gamma(\xi)}{d\xi} d\xi. \quad (25)$$

3.2.3 Coeficiente complexo de Poisson

Fisicamente, o coeficiente complexo de Poisson pode ser definido como a razão entre a deformação na direção lateral (ou radial) e a deformação na direção longitudinal em ensaios de tração pura (PRITZ, 1998). Assumindo que seja aplicada uma deformação oscilatória na direção longitudinal, a deformação lateral está atrasada em relação a essa deformação axial devido à capacidade de dissipação de energia do material (THEOCARIS, 1968; KUGLER; STACER; STEIMLE, 1990; PRITZ, 1998; CUI; TANG; SHEN, 2016). Como resultado, se a deformação oscilatória é uma função harmônica, representada na forma complexa como

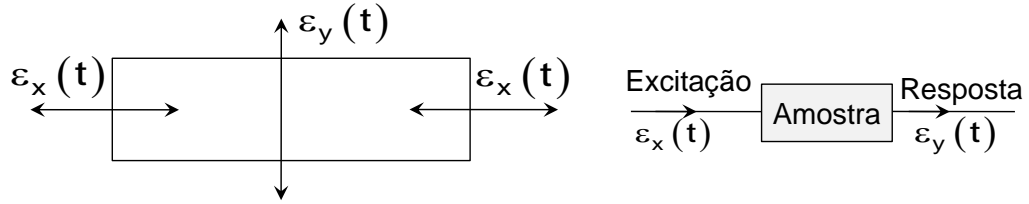
$$\varepsilon_x(t) = \hat{\varepsilon}_x e^{i\Omega t}, \quad (26)$$

a deformação lateral pode ser posta como

$$\varepsilon_y(t) = \hat{\varepsilon}_y e^{i(\Omega t - \varphi)}, \quad (27)$$

onde $\hat{\varepsilon}_x$ e $\hat{\varepsilon}_y$ são amplitudes de deformações, $i = \sqrt{-1}$, em que i é definido como número imaginário, $\varphi = \Omega \Delta t$, em que φ é o ângulo de atraso da deformação lateral em relação a deformação axial (TSCHOEGL, 1989; PRITZ, 1998; PRITZ, 2007; GRAZIANI; BOCCI; CANESTRARI, 2014).

FIGURA 9 - REPRESENTAÇÃO DO PROCESSO DE MEDIÇÃO DO COEFICIENTE DE POISSON PELO MÉTODO DIRETO



FONTE: Adaptado de Pritz (2007).

De acordo com Pritz (1998) e Pritz (2007), considerando que o coeficiente complexo de Poisson é uma função resposta em frequência de um sistema linear, como ilustrado na FIGURA 9, a relação entre a deformação lateral, $\varepsilon_y(t)$, pela deformação longitudinal, $\varepsilon_x(t)$, resulta no coeficiente complexo de Poisson, $\nu^*(\Omega)$, o qual pode ser posto na forma

$$\nu^*(i\Omega) = \varepsilon_y^*(i\Omega) / \varepsilon_x^*(i\Omega) = \nu'(\Omega) - i\nu''(\Omega) = \nu'(\Omega) [1 - i\eta_\nu(\Omega)], \quad (28)$$

em que $\varepsilon_x^*(i\Omega)$ e $\varepsilon_y^*(i\Omega)$ são as transformadas de Fourier das funções de deformações laterais e longitudinais, respectivamente, definidas no domínio do tempo, $\nu'(\Omega)$ é coeficiente dinâmico de Poisson, $\nu''(\Omega)$ é o componente de perda. Neste caso, devido ao atraso na deformação lateral, pode-se afirmar que a parcela imaginária desse coeficiente complexo é negativa (PRITZ, 1998). Ademais, $\eta_\nu(\Omega)$ é o fator de perda do coeficiente de Poisson, obtido como

$$\eta_\nu(\Omega) = \nu''(\Omega) / \nu'(\Omega). \quad (29)$$

Conforme Booiij e Thoone (1982), Tschoegl (1989), Pritz (1998), Pritz (2000), Pritz (2007) e Rouleau et al. (2015) as parcelas real e imaginária de funções viscoelásticas complexas podem ser descritas empregando as relações de Kramers-Kronig. Assim, as parcelas real e imaginária do coeficiente complexo de Poisson estão relacionadas como (PRITZ, 1998; PRITZ, 2000; PRITZ, 2007)

$$\nu''(\Omega) \approx -\frac{\pi}{2} \Omega \frac{d\nu'(\Omega)}{d\Omega} \quad \text{e} \quad \eta_\nu(\Omega) \approx -\frac{\pi}{2} \frac{d[\log \nu'(\Omega)]}{d[\log \Omega]} . \quad (30)$$

A análise da equação (30) indica que a inclinação da curva $\nu'(\Omega)$ é negativa ao longo da frequência. Portanto, o módulo dinâmico de Poisson de MVEs sólidos deve ser monotonicamente decrescente para frequências crescentes (THEOCARIS, 1968; TSCHOEGL, 1989; PRITZ, 1998; PRITZ, 2000; TSCHOEGL, 2002; PRITZ, 2007).

3.2.4 Viscoelasticidade fracionária

Para descrição do comportamento mecânico de MVEs, vários trabalhos fazem uso de modelos reológicos constitutivos da elasticidade linear baseados no cálculo fracionário (GLÖCKLE; NONNENMACHER, 1994; WELCH et al., 1999; GUEDES, 2011; ROULEAU et al., 2015). Esses modelos consistem de combinações reológicas de molas, representando o comportamento elástico, e amortecedores fracionários, os quais descrevem o comportamento viscoso. Para ilustrar tal ideia, têm-se na FIGURA 10, dois modelos reológicos fundamentais. Qualquer associação (em série, paralelo, série-paralelo etc.) que envolva molas e amortecedores fracionários de Scott-Blair recaem-se em modelos reológicos viscoelásticos fracionários (MAINARDI, 2010). Conforme Tschoegl (1989) e Brinson e Brinson (2008), a modelagem desses sistemas resulta em equações diferenciais fracionárias na forma

$$\left[1 + \sum_{r=1}^n a_r \frac{d^{\beta_r}}{dt^{\beta_r}} \right] \sigma(t) = \left[k + \sum_{r=1}^n b_r \frac{d^{\beta_r}}{dt^{\beta_r}} \right] \varepsilon(t), \quad (31)$$

onde n , k , a_r e b_r são parâmetros associados ao modelo reológico adotado, $\sigma(t)$ é a função de tensão, $\varepsilon(t)$ a função de deformação, t é o tempo, $d^{\beta_r}/dt^{\beta_r}(\cdot)$ representa um operador diferencial de ordem fracionária β_r , dada conforme $\beta_r = r + \beta - 1$, onde $0 < \beta < 1$ (MAINARDI, 2010).

No presente estudo, as definições de Riemann-Liouville (MAINARDI, 2010), para a derivada fracionária, se mostram adequadas, visto que se considera um sistema estrutural que se encontra inicialmente em repouso. Com isso, não há necessidade de tratar com informações que ocorrem para tempos $t < 0$. Assim, considerando uma função $f(t)$ bem comportada ($t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0$), a definição da derivada

fracionária de Riemann-Liouville à esquerda, com ordem de diferenciação β , é dada como

$$\frac{d^\beta f(t)}{dt^\beta} = {}_0D_t^\beta [f(t)] = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1+\alpha-m}} d\tau, \quad m-1 < \beta < m, \quad (32)$$

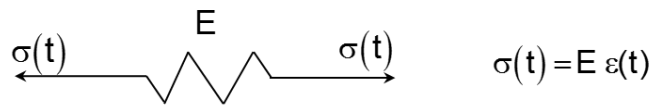
onde β é um número real positivo, m é um número inteiro positivo e $\Gamma(\cdot)$ é a função gama de Euler (MAINARDI, 2010; LI; ZENG, 2015). Nesse caso, conforme Mainardi (2010) e Kazem (2013), a transformada de Laplace (TL) para a derivada de ordem fracionária de Riemann-Liouville, de ordem β , pode ser colocada como

$$L\{{}_0D_t^\beta [f(t)]\} = s^\beta \tilde{f}(s). \quad (33)$$

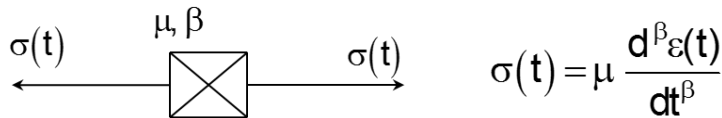
Conforme Kassem Grasley e Masad (2013), a presença do operador integral, equações (22) à (30), ou diferencial, equação (31), nas equações constitutivas viscoelásticas implica que o comportamento mecânico do material é dependente do histórico de tensão ou de deformação. Consequentemente, a tensão, a deformação e o módulo de fluência (ou de relaxação) não podem ser simplesmente substituídos por soluções elásticas. Nesse contexto, apresenta-se, a seguir, um método denominado princípio da correspondência, desenvolvido por Read (1950), o qual possibilita o uso de relações elásticas para MEVs.

FIGURA 10 - ELEMENTOS REOLÓGICOS FÍSICOS BÁSICOS DE MODELOS DA VISCOELASTICIDADE FRACIONÁRIA

a) Mola ideal



b) Amortecedor fracionário de Scott-Blair



FONTE: O autor (2018).

3.3 PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA

O princípio da correspondência elástico-viscoelástico (PCEV) envolve o uso das transformadas de Laplace (TL) que possibilita remover o operador diferencial (ou

integral) de modo a criar uma equação constitutiva em forma algébrica associada àquela dos materiais elásticos (CHEN et al., 2012). Como resultado, as equações transformadas podem ser utilizadas para a modelagem do comportamento do material a fim de obter os campos de tensões e de deformações em MVEs (CHEN et al., 2012).

3.3.1 Relações fundamentais no Princípio da Correspondência Elástico-Viscoelástico

Para demonstrar o PCEV, considere-se, inicialmente, a aplicação da TL na equação (31), obtendo

$$a(s)\sigma(s) = b(s)\varepsilon(s), \quad (34)$$

onde $a(s) = 1 + \sum_{r=1}^n s^{\beta_r} a_r$ e $b(s) = k + \sum_{r=1}^n s^{\beta_r} b_r$. Da equação equação (34), obtêm-se a

Lei de Hooke no domínio de Laplace conforme

$$\sigma(s) = \tilde{E}(s)\varepsilon(s) \quad \text{e} \quad \varepsilon(s) = \tilde{D}(s)\sigma(s), \quad (35)$$

onde $\tilde{E}(s) = b(s)/a(s)$ e $\tilde{D}(s) = a(s)/b(s)$ (TSCHOEGL, 1989). Neste caso, os termos $\tilde{E}(s)$ e $\tilde{D}(s)$ são aqui denominados **módulo operacional de Young** e **módulo operacional de fluência uniaxial**, respectivamente (TSCHOEGL, 1989; PARK e SCHAPERY, 1999).

Note-se que as relações constitutivas na equação (35) estão escritas em termos de tensões uniaxiais. Essas relações possuem formas correspondentes que relacionam tensão, $\tau(\cdot)$, e deformação, $\gamma(\cdot)$, em cisalhamento puro, as quais, no domínio de Laplace, podem ser postas como

$$\tau(s) = \tilde{G}(s)\gamma(s) \quad \text{e} \quad \gamma(s) = \tilde{J}(s)\tau(s), \quad (36)$$

onde $\tilde{G}(s)$ e $\tilde{J}(s)$ são definidos, como **módulo operacional de cisalhamento** e **módulo operacional de fluência de cisalhamento**, respectivamente.

A partir das relações das equações (35) e (36), podem ser obtidas duas relações fundamentais da viscoelasticidade linear, postas como

$$\tilde{E}(s)\tilde{D}(s)=1 \quad \text{e} \quad \tilde{G}(s)\tilde{J}(s)=1. \quad (37)$$

Conforme Tschoegl (1989), as equações (35), (36) e (37) estão na mesma forma algébrica que as equações elásticas constitutivas.

As equações supracitadas formam a base da teoria do comportamento viscoelástico linear, a partir das quais o comportamento mecânico do material pode ser descrito nos domínios do tempo ou da frequência.

Retransformando as equações (35) e (36) para o domínio do tempo, recai-se no Princípio da Superposição de Boltzmann (seção 3.2.2), o qual evidencia a dependência da tensão (ou deformação) como função do histórico de deformação (ou tensão). Desse modo, as formas gerais das equações constitutivas para MVEs homogêneos, isotrópicos e lineares podem ser postas como

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_0^t E(t-\xi) \frac{d\varepsilon(\xi)}{d\xi} d\xi; & \varepsilon(t) &= \int_0^t D(t-\xi) \frac{d\sigma(\xi)}{d\xi} d\xi; \\ \tau(t) &= \int_0^t G(t-\xi) \frac{d\gamma(\xi)}{d\xi} d\xi; & \gamma(t) &= \int_0^t J(t-\xi) \frac{d\tau(\xi)}{d\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (38)$$

Tschoegl (1989), Lakes (2009) e Lemini (2014) afirmam que o PCEV permite a utilização das relações elásticas a fim de resolver problemas nos quais os materiais envolvidos possuem propriedades constitutivas viscoelásticas. Assim, quando necessário, será tomado em consideração este princípio.

3.3.2 Resposta à excitação do tipo degrau unitário

Seja o ensaio de relaxação com amplitude de deformação constante ε_0 , a qual é aplicada em um instante $t \geq 0$, isto é, (TSCHOEGL, 1989; LAKES, 2009)

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t). \quad (39)$$

Aplicando a TL a essa equação, obtém-se

$$\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon_0}{s}. \quad (40)$$

Substituindo a equação (40) na equação (35), resulta em

$$\sigma(s) = \frac{\tilde{E}(s)}{s} \varepsilon_0. \quad (41)$$

Retransformando a equação (41) para o domínio do tempo, obtém-se

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 L^{-1} \left[\frac{\tilde{E}(s)}{s} \right]. \quad (42)$$

Note-se que a transformada inversa de $[\tilde{E}(s)/s]$ tem a dimensão de um módulo (TSCHOEGL, 1989; LAKES, 2009). Assim, considerando um ensaio uniaxial, define-se o módulo de relaxação de Young, no domínio de Laplace, $E(s)$, na forma (TSCHOEGL, 1989; LAKES, 2009)

$$E(s) = \frac{\tilde{E}(s)}{s}. \quad (43)$$

Portanto, a equação (42) pode ser reescrita como

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}. \quad (44)$$

De forma semelhante, considerando uma excitação de tensão do tipo degrau de intensidade σ_0 , aplicada no instante $t=0$. Essa função carregamento, definida no domínio do tempo, pode ser escrita como (SOUSA, 2015)

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t). \quad (45)$$

Aplicando a transformada de Laplace à equação (45), obtém-se

$$\sigma(s) = \frac{\sigma_0}{s}. \quad (46)$$

A substituição da equação (46) à equação (35), resulta em (TSCHOEGL, 1989; LAKES, 2009)

$$\varepsilon(s) = \left[\frac{\tilde{D}(s)}{s} \right] \sigma_0. \quad (47)$$

De modo similar, a transformada inversa de $\left[\tilde{D}(s)/s \right]$ tem a dimensão de um módulo, o qual pode ser definido como (TSCHOEGL, 1989; LAKES, 2009; PARK e SCHAPERY, 1999)

$$D(s) = \frac{\tilde{D}(s)}{s}, \quad (48)$$

onde $D(s)$ é o módulo de fluência uniaxial no domínio de Laplace, considerando ensaio uniaxial. Assim, relacionando as equações (47) e (48) e retransformando para o domínio do tempo, o módulo de fluência uniaxial no domínio do tempo é posto como

$$D(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}. \quad (49)$$

Analogamente, os módulos de relaxação de cisalhamento e o módulo de fluência de cisalhamento, no domínio de Laplace, estão relacionados com os seus respectivos módulos operacionais na forma (TSCHOEGL, 1989; PARK; SCHAPERY, 1999)

$$\tilde{G}(s) = sG(s) \quad \text{e} \quad \tilde{J}(s) = sJ(s). \quad (50)$$

A modelagem tridimensional do comportamento mecânico viscoelástico pode ser descrito empregando as equações supracitadas. Entretanto, para essa modelagem faz-se necessário uma conexão dessas equações com a lei de Hooke generalizada.

3.3.3 Lei de Hooke Generalizada no domínio de Laplace

De forma genérica, a relação tensão-deformação pode ser descrita através da lei de Hooke Generalizada, definida no domínio de Laplace. Neste caso, conforme Tschoegl (1989), Lakes (2009), Lai (2010) e Lemini (2014), escreve-se

$$\sigma_{ij}(s) = \tilde{\lambda}(s) \varepsilon_{kk}(s) \delta_{ij}(s) + 2\tilde{G}(s) \varepsilon_{ij}(s), \quad (51)$$

onde $\tilde{\lambda}(\cdot)$ é uma função relacionada à constante de Lamé, a qual é uma propriedade do material, $\delta_{ij}(\cdot)$ é chamado de delta de Kronecker e $\varepsilon_{kk}(\mathbf{s}) = \varepsilon_{11}(\mathbf{s}) + \varepsilon_{22}(\mathbf{s}) + \varepsilon_{33}(\mathbf{s})$ é o traço da matriz de deformações.

A lei de Hooke generalizada no domínio de Laplace é muito útil na demonstração e obtenção do coeficiente operacional de Poisson. Esse é o tema central da próxima seção.

3.3.4 Coeficiente operacional de Poisson

Considerando um ensaio uniaxial de tração, a matriz de tensões pode ser escrita na forma (TSCHOEGL, 1989; LAKES, 2009; LEMINI, 2014)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Consequentemente, ocorre uma deformação na direção uniaxial na mesma direção da força, a qual pode ser representada pelo componente ε_{11} do tensor. Simultaneamente, porém, considerando um material isotrópico, a contração ocorre igualmente nas duas direções perpendiculares, de modo que o tensor de deformações é dado por (TSCHOEGL, 1989; LAKES, 2009; LEMINI, 2014)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}, \quad (53)$$

em que $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$. Ademais, para um ensaio uniaxial, a relação tensão deformação pode ser posta como

$$\sigma_{11}(\mathbf{s}) = \tilde{E}(\mathbf{s}) \varepsilon_{11}(\mathbf{s}). \quad (54)$$

O coeficiente de Poisson pode ser definido como a razão entre a deformação lateral na direção transversal e a deformação na direção axial. Conforme Tschoegl (1989), matematicamente, o **coeficiente operacional de Poisson**, $\tilde{\nu}(\mathbf{s})$, pode ser definido de forma análoga como

$$\tilde{v}(s) = -\frac{\varepsilon_{22}(s)}{\varepsilon_{11}(s)} = -\frac{\varepsilon_{33}(s)}{\varepsilon_{11}(s)}. \quad (55)$$

onde $\tilde{v}(s) = s v(s)$, em que $v(s)$ é a TL do coeficiente de Poisson definido no domínio do tempo. Partindo das equações (51), (54) e (55), considerando um ensaio do tipo uniaxial, obtém-se um sistema de equações lineares na forma

$$\begin{cases} \sigma_{11}(s) = \tilde{\lambda}(s)\varepsilon_{kk}(s) + 2\tilde{G}(s)\varepsilon_{11}(s) \\ \sigma_{22}(s) = \tilde{\lambda}(s)\varepsilon_{kk}(s) + 2\tilde{G}(s)\varepsilon_{22}(s) \\ \sigma_{33}(s) = \tilde{\lambda}(s)\varepsilon_{kk}(s) + 2\tilde{G}(s)\varepsilon_{33}(s) \end{cases} \quad (56)$$

Em ensaios puramente uniaxiais, $\sigma_{22}(s) = \sigma_{33}(s) = 0$. Assim, considerando a equação (54), a equação (56) pode ser reescrita como (LAKES, 2009)

$$\begin{cases} \tilde{E}(s)\varepsilon_{11}(s) = \tilde{\lambda}(s)\varepsilon_{kk}(s) + 2\tilde{G}(s)\varepsilon_{11}(s) \\ 0 = \tilde{\lambda}(s)\varepsilon_{kk}(s) + 2\tilde{G}(s)\varepsilon_{22}(s). \end{cases} \quad (57)$$

Resolvendo o sistema, encontra-se uma relação envolvendo o módulo operacional de Young, o módulo operacional de cisalhamento e o coeficiente operacional de Poisson na forma (THEOCARIS, 1964; TSCHOEGL, 1989; TSCHOEGL, 2002, LAKES, 2009)

$$\tilde{E}(s) = 2\tilde{G}(s)[1 + \tilde{v}(s)]. \quad (58)$$

Analogamente, pode-se obter uma relação envolvendo o módulo operacional de fluência uniaxial, de fluência de cisalhamento e o coeficiente operacional de fluência, o que resulta (THEOCARIS, 1964; TSCHOEGL, 1989; TSCHOEGL, 2002)

$$\tilde{D}(s) = 2\tilde{J}(s)[1 + \tilde{v}(s)]. \quad (59)$$

Portanto, no plano transformado, o coeficiente operacional de Poisson pode ser obtido reorganizando a equação (58) conforme

$$\tilde{v}(s) = \frac{\tilde{E}(s)}{2\tilde{G}(s)} - 1. \quad (60)$$

Considerando a equação (37), em que $\tilde{G}(s)\tilde{J}(s)=1$, a equação (60) pode ser reescrita como

$$\tilde{v}(s) = \frac{\tilde{E}(s)\tilde{J}(s)}{2} - 1. \quad (61)$$

Como $\tilde{v}(s) = s v(s)$, essa equação pode ser escrita na forma

$$v(s) = \frac{sE(s)J(s)}{2} - \frac{1}{s}. \quad (62)$$

As relações viscoelásticas no domínio de Laplace aqui descritas formam a base para a obtenção do coeficiente de Poisson nos domínios do tempo e da frequência.

3.3.5 Funções viscoelásticas complexas: domínio da frequência

Manipulações envolvendo as funções materiais da teoria da viscoelasticidade são grandemente facilitadas pelas formulações de problemas no plano transformado de Laplace. A transformada de Laplace, $\tilde{f}(s)$, de uma função $f(t)$ bem comportada é dada por

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = L[f(t)], \quad (63)$$

onde $L[\cdot]$ denota o operador da transformada de Laplace (PAPOULIS, 1962). A variável 's' transformada é, em geral, um número complexo, isto é,

$$s = a + i\Omega \quad (64)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ (PAPOULIS, 1962). Entretanto, normalmente, tem-se interesse tanto em respostas de funções viscoelásticas no domínio do tempo, bem como no domínio da frequência. Dado que a linearidade das relações viscoelásticas são funções do tempo ou, equivalentemente, da frequência, suas formas explícitas dependem do tipo de excitação sob consideração (TSCHOEGL, 1989). Quando se trata de excitações harmônicas em regime permanente, o princípio da correspondência requer que a parcela real da variável complexa "s" tenda para um valor nulo, isto é, $a \rightarrow 0$, o que,

consequentemente, resulta em $s \rightarrow i\Omega$ (PAPOULIS, 1962; TSCHOEGL, 1989; PARK e SCHAPERY, 1999).

Portanto, segundo Nashif et al. (1985), Tschoegl (1989) e Park e Schapery (1999), as funções complexas viscoelásticas no domínio da frequência, Ω , considerando um regime permanente, estão relacionadas com os módulos operacionais na forma (APÊNDICE 2)

$$E^*(\Omega) = \tilde{E}(s) \Big|_{s=i\Omega} \quad \text{e} \quad G^*(\Omega) = \tilde{G}(s) \Big|_{s=i\Omega}, \quad (65)$$

onde $E^*(\Omega)$ e $G^*(\Omega)$ são o módulo complexo de Young e o módulo complexo de cisalhamento, respectivamente. Estes módulos são compostos por uma parcela real e uma parcela imaginária, como

$$E^*(\Omega) = E'(\Omega) + iE''(\Omega) \quad \text{e} \quad G^*(\Omega) = G'(\Omega) + iG''(\Omega), \quad (66)$$

as quais representam as capacidades de armazenamento e de perda de energia, respectivamente. Ademais, as parcelas $E'(\Omega)$, $G'(\Omega)$, $E''(\Omega)$ e $G''(\Omega)$ são definidas, respectivamente, como módulo dinâmico de Young, módulo dinâmico de cisalhamento, módulo de perda de Young e módulo de perda de cisalhamento. Conforme Tschoegl (1989), relacionando os dois módulos complexos supracitados, no domínio da frequência, é possível obter um terceiro módulo, denominado módulo complexo volumétrico, $K^*(\Omega)$, o qual pode ser posto como

$$K^*(\Omega) = K'(\Omega) + iK''(\Omega) = \frac{E^*(\Omega)G^*(\Omega)}{9G^*(\Omega) - 3E^*(\Omega)}, \quad (67)$$

onde $K'(\Omega)$ e $K''(\Omega)$ são definidos, respectivamente, como módulo dinâmico volumétrico e módulo de perda volumétrico.

Dadas as definições iniciais, de acordo com Nashif et al. (1985), os módulos de perda e de armazenamento podem ser relacionados como

$$\eta_E(\Omega) = E''(\Omega)/E'(\Omega), \quad \eta_G(\Omega) = G''(\Omega)/G'(\Omega) \quad \text{e} \quad \eta_K(\Omega) = K''(\Omega)/K'(\Omega), \quad (68)$$

onde $\eta_E(\Omega)$, $\eta_G(\Omega)$ e $\eta_K(\Omega)$ são funções denominadas como fatores de perda dos módulos complexos de Young, de cisalhamento e volumétrico, respectivamente.

Outra função viscoelástica muito importante é o coeficiente complexo de Poisson, $\nu^*(\Omega)$. Para descrever esse coeficiente, considera-se $s = i\omega$ (APÊNDICE 2). Com isso, de acordo com Nashif et al. (1985), a equação (60) pode ser posta na forma

$$\nu^*(\Omega) = \frac{E^*(\Omega)}{2G^*(\Omega)} - 1, \quad (69)$$

onde $\nu^*(\Omega)$ é apresentado na equação (28).

Nesta seção, demonstram-se as principais relações entre as funções viscoelásticas, as quais partindo de relações genéricas definidas no domínio do tempo são obtidas relações no domínio transformado de Laplace. Ademais, considerando $s = i\Omega$, são obtidas as relações no domínio da frequência. No entanto, como posto na subseção 3.2.4, para descrever o comportamento de MVEs, são necessárias as funções viscoelásticas escritas em termos dos modelos reológicos envolvendo molas e amortecedores fracionários. Este é o tema da próxima seção.

3.4 FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS: MODELO DE ZENER FRACIONÁRIO

Conforme Galucio Deu e Ohayon (2004), Mainard (2010), Rouleau et al. (2015) e Ciniello (2016), existem vários modelos constitutivos envolvendo derivadas de ordem fracionária: Maxwell, Kelvin-Voigt, Zener, entre outros. Como apresentado por Mainardi e Spada (2011) e Ciniello (2016), o Modelo de Zener Fracionário (FIGURA 11) se mostra bastante eficiente para prever o comportamento de MVEs lineares. De acordo com Bagley e Torvik (1986), Galucio Deu e Ohayon (2004) e Mainardi (2010), o comportamento mecânico tensão-deformação pode ser regido pela equação constitutiva de ordem fracionária escrita em termos do sistema físico de Zener fracionário e posto na forma

$$\left(1 + \frac{\mu_E}{E_1 + E_2} \frac{d^{\beta_E}}{dt^{\beta_E}}\right) \sigma(t) = \left(\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} + \frac{E_2 \mu_E}{E_1 + E_2} \frac{d^{\beta_E}}{dt^{\beta_E}}\right) \varepsilon(t), \quad (70)$$

onde E_1 e E_2 são os módulos de rigidez dos elementos elásticos, μ_E é o coeficiente de viscosidade e β_E ($0 < \beta_E < 1$) é a ordem não inteira de diferenciação do

amortecedor de Scott-Blair. Definindo os parâmetros auxiliares $E_\infty = E_1 E_2 / (E_1 + E_2)$, $r_E = (E_1 + E_2) / E_1$, $\tau_E^{\beta_E} = \mu_E / (E_1 + E_2)$, é possível reescrever a equação (70) como

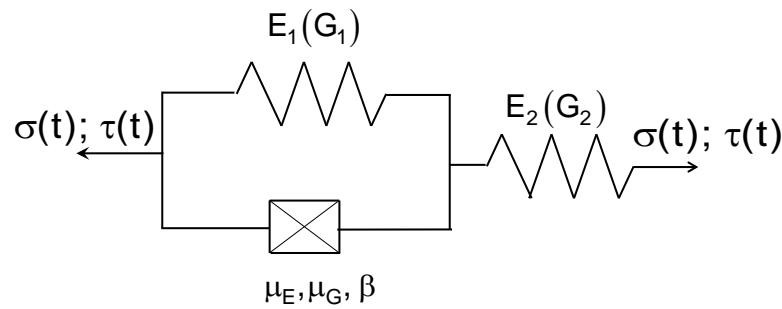
$$\left(1 + \tau_E^{\beta_E} \frac{d^{\beta_E}}{dt^{\beta_E}}\right) \sigma(t) = \left(E_\infty + E_\infty r_E \tau_E^{\beta_E} \frac{d^{\beta_E}}{dt^{\beta_E}}\right) \varepsilon(t). \quad (71)$$

Definindo $E_0 = E_\infty r_E$, reescreve-se a equação (71) na forma

$$\left(1 + \tau_E^{\beta_E} \frac{d^{\beta_E}}{dt^{\beta_E}}\right) \sigma(t) = \left(E_\infty + E_0 \tau_E^{\beta_E} \frac{d^{\beta_E}}{dt^{\beta_E}}\right) \varepsilon(t). \quad (72)$$

Este modelo matemático é conhecido na literatura como modelo constitutivo fracionário de quatro parâmetros (PRITZ, 1996).

FIGURA 11 - REPRESENTAÇÃO DO MODELO DE ZENER FRACIONÁRIO. PARÂMETROS RELACIONADOS A ENSAIO UNIAXIAL (OU CISALHAMENTO PURO)



FONTE: O autor (2018).

Note-se que a equação (72) está escrita em termos de ensaios do tipo tração uniaxial. Tal equação também tem uma forma correspondente considerando ensaio de cisalhamento. Neste caso, a relação tensão-deformação, em cisalhamento, pode ser posta como

$$\left(1 + \tau_G^{\beta_G} \frac{d^{\beta_G}}{dt^{\beta_G}}\right) \tau(t) = \left(G_\infty + G_0 \tau_G^{\beta_G} \frac{d^{\beta_G}}{dt^{\beta_G}}\right) \gamma(t), \quad (73)$$

onde $G_\infty = G_1 G_2 / (G_1 + G_2)$, $r_G = (G_1 + G_2) / G_1$, $\tau_G^{\beta_G} = \mu_G / (G_1 + G_2)$ e $G_0 = G_\infty r_G$. Neste caso, G_1 e G_2 são os módulos de rigidez dos elementos elásticos, μ_G é o coeficiente de viscosidade e β_G é a ordem não inteira de diferenciação do amortecedor de Scott-Blair vinculado a relação tensão-deformação em cisalhamento (FIGURA 11).

A partir das equações diferenciais fracionárias descritas, para o modelo de Zener fracionário de quatro parâmetros, podem-se obter as demais funções viscoelásticas, definidas nos domínios de Laplace, do tempo e da frequência.

3.4.1 Funções viscoelásticas operacionais

Anteriormente na seção 3.3, foram apresentadas de modo genérico as seguintes funções viscoelásticas operacionais: módulo operacional de Young $\tilde{E}(s)$, módulo operacional de fluência uniaxial $\tilde{D}(s)$, módulo operacional de cisalhamento $\tilde{G}(s)$, módulo operacional de fluência de cisalhamento $\tilde{J}(s)$ e coeficiente operacional de Poisson $\tilde{\nu}(s)$. Nesta seção, essas funções são escritas considerando o modelo constitutivo de Zener fracionário.

Para obter modelos para essas expressões, considere-se, inicialmente, a aplicação da TL a todos os termos da equação (72), o que resulta

$$\sigma(s) + s^{\beta_E} \tau_E^{\beta_E} \sigma(s) = E_\infty \varepsilon(s) + s^{\beta_E} E_0 \tau_E^{\beta_E} \varepsilon(s). \quad (74)$$

Definindo $b_E = \tau_E^{\beta_E}$, $\bar{E}_0 = E_0$ e $\bar{E}_\infty = E_\infty$, o módulo operacional de Young pode ser obtido reordenando a equação (74) como

$$\tilde{E}(s) = \frac{\sigma(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{\bar{E}_0 + \bar{E}_\infty b_E s^{\beta_E}}{1 + b_E s^{\beta_E}}. \quad (75)$$

Além disso, o módulo operacional de fluência em tração pode ser obtido relacionando as equações (37) e (75), obtendo

$$\tilde{D}(s) = \frac{\varepsilon(s)}{\sigma(s)} = \frac{1 + b_E s^{\beta_E}}{\bar{E}_0 + \bar{E}_\infty b_E s^{\beta_E}}. \quad (76)$$

Outrossim, o módulo operacional de cisalhamento pode ser obtido aplicando a TL à equação (73), resultando em

$$\tilde{G}(s) = \frac{\tau(s)}{\gamma(s)} = \frac{\bar{G}_0 + \bar{G}_\infty b_G s^{\beta_G}}{1 + b_G s^{\beta_G}}, \quad (77)$$

onde $\bar{G}_0 = G_\infty$, $\bar{G}_\infty = G_0$ e $b_G = \tau_G^{\beta_G}$. Similarmente, o módulo operacional de fluência de cisalhamento pode ser obtido, considerando a equação (37), como

$$\tilde{J}(s) = \frac{1 + b_G s^{\beta_G}}{\bar{G}_0 + \bar{G}_\infty b_G s^{\beta_G}}. \quad (78)$$

O coeficiente operacional de Poisson pode ser posto, considerando as equações (61), (75) e (78), na forma

$$\tilde{\nu}(s) = \frac{\bar{E}_0}{2\bar{G}_0} \left[\frac{(r_E \tau_E^{\beta_E} \tau_G^{\beta_G}) s^{\beta_E + \beta_G} + (r_E \tau_E^{\beta_E}) s^{\beta_E} + (\tau_G^{\beta_G}) s^{\beta_G} + 1}{(\tau_E^{\beta_E} \tau_G^{\beta_G} r_G) s^{\beta_E + \beta_G} + \tau_E^{\beta_E} s^{\beta_E} + r_G \tau_G^{\beta_G} s^{\beta_G} + 1} \right] - 1. \quad (79)$$

A equação (79) é está escrita no domínio de Laplace, a partir do qual por meio de relações algébricas podem ser obtidos os comportamento do coeficiente de Poisson no domínio do tempo e/ou da frequência.

Dessa forma, a partir das funções viscoelásticas operacionais descritas (módulos operacionais de Young, de cisalhamento, fluência, Poisson etc.) obtém-se as funções viscoelásticas definidas no domínio do tempo, aplicando a Transformada Inversa de Laplace (TIL), e no domínio da frequência, considerando regime permanente em que $s = i\Omega$ (APÊNDICE 2).

3.4.2 Funções viscoelásticas complexas no domínio da frequência considerando influência da temperatura

Considerando o domínio da frequência ($s = i\Omega$), o módulo complexo de Young considerando a influência da temperatura, $E^*(T, \Omega)$, é obtido a partir da equação (75) e escrito como

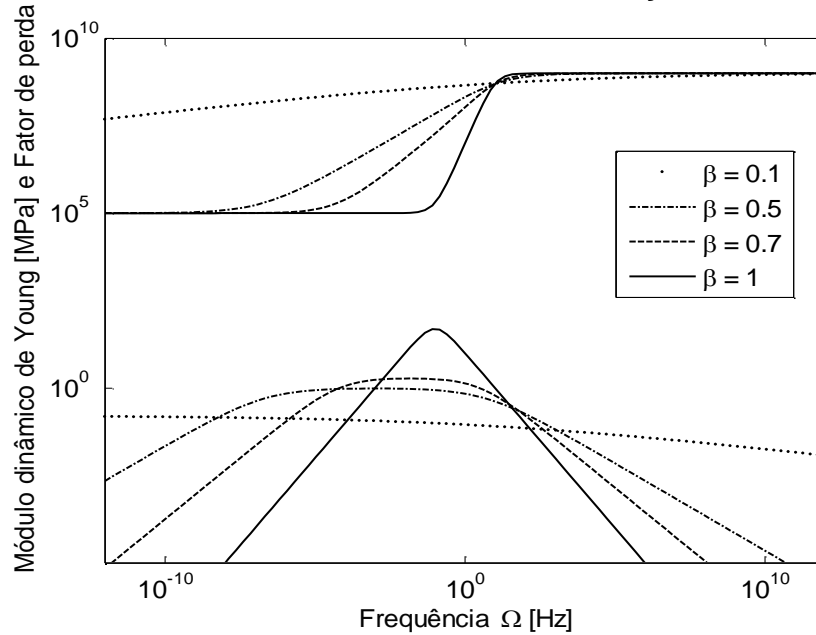
$$E^*(T, \Omega) = \frac{\bar{E}_0 + \bar{E}_\infty b_E (i\Omega_R)^{\beta_E}}{1 + b_E (i\Omega_R)^{\beta_E}}, \quad (80)$$

sendo Ω_R a frequência reduzida, a qual é apresentada conforme a Eq. (3).

A dependência do módulo dinâmico e do fator de perda, considerando o modelo dado pela equação (80) e diferentes valores do parâmetro $\beta_E = \beta$, é mostrada na FIGURA 12. Observa-se que quanto menor o valor da ordem de diferenciação, β ,

menor é a inclinação do módulo dinâmico de Young na região próxima do ponto de inflexão (CRUZ, 2004). Além disso, alterando os valores de β , ocorrem variações no valor da frequência onde ocorre o máximo fator de perda, bem como sua amplitude (CRUZ, 2004).

FIGURA 12 - ILUSTRAÇÃO DO MÓDULO DINÂMICO DE YOUNG E DO FATOR DE PERDA PARA DIFERENTES ORDENS DE DIFERENCIAÇÃO



FONTE: O autor (2018).

O módulo complexo de cisalhamento, definido no domínio da frequência, pode ser obtido de forma análoga, por meios das equação (77), e posto na forma

$$G^*(T, \Omega) = \frac{\bar{G}_0 + \bar{G}_\infty b_G (i\Omega_R)^{\beta_G}}{1 + b_G (i\Omega_R)^{\beta_G}}. \quad (81)$$

O comportamento do módulo dinâmico e do fator de perda do módulo complexo de cisalhamento é análogo àquele do módulo complexo de Young (CRUZ, 2004). Neste caso, conforme Chen et al. (2017) e Sousa, Silva e Pereira (2018), os módulos dinâmicos de Young e de cisalhamento possuem inclinações muito próximas. Esse comportamento fica evidente nos resultados apresentados no transcorrer deste texto. Portanto, pode-se considerar que os dois módulos complexos (Young e de cisalhamento) possuem um mesmo valor para a de ordem de diferenciação, isto é, $\beta_E \cong \beta_G \cong \beta$.

Conforme Tschoegl (1989), relacionando os dois módulos complexos discutidos, no domínio da frequência, é possível obter o módulo complexo volumétrico considerando a influência da temperatura, $K^*(T, \Omega)$, o qual pode ser representado como (TSCHOEGL, 1989)

$$K^*(T, \Omega) = \frac{E^*(T, \Omega)G^*(T, \Omega)}{9G^*(T, \Omega) - 3E^*(T, \Omega)}. \quad (82)$$

Além disso, o coeficiente complexo de Poisson pode ser obtido indiretamente por meio da equação (69). Assim, após a substituição das equações (80) e (81), tem-se

$$\nu^*(T, \Omega) = \frac{\bar{E}_0}{2\bar{G}_0} \left[\frac{\left(r_E \tau_E^\beta \tau_G^\beta (i\Omega_R)^{2\beta} + r_E \tau_E^\beta (i\Omega_R)^\beta + \tau_G^\beta (i\omega)^\beta + 1 \right)}{\left(1 + \tau_E^\beta (i\omega)^\beta \right) \left(1 + r_G \tau_G^\beta (i\omega)^\beta \right)} \right] - 1, \quad (83)$$

onde $\nu^*(T, \Omega)$ é definido como coeficiente complexo de Poisson, apresentado genericamente segundo a equação (28).

3.4.3 Funções viscoelásticas no domínio do tempo considerando influência da temperatura

Como posto por Moschen (2006), Mainardi e Spada (2011) e Ciniello (2016), considerando o modelo de Zener fracionário, dado pela equação (71), o módulo de relaxação de Young e o módulo de fluência uniaxial podem ser obtidos, respectivamente, como

$$E(t) = E_\infty \left[1 + r_E E_{\beta_E} \left(- \left(\frac{t}{\tau_E} \right)^{\beta_E} \right) \right] \quad (84)$$

e

$$D(t) = \frac{1}{E_\infty} \left(\frac{r_E + 1}{r_E} \right) - \frac{1}{E_\infty} E_{\beta_E} \left(- \frac{1}{r_E} \left(\frac{t}{\tau_E} \right)^{\beta_E} \right), \quad (85)$$

sendo $E_{\beta_E}(\cdot)$ a função de Mittag-Leffler (ML) de um parâmetro de ordem β_E (APÊNDICE 1).

Ademais, tomando em consideração a influência da temperatura, as equações (84) e (85) podem ser reescritas, respectivamente, como

$$E(T, t) = E_{\infty} \left[1 + r_E E_{\beta_E} \left(- \left(t_R / \tau_E \right)^{\beta_E} \right) \right] \quad (86)$$

e

$$D(T, t) = \frac{1}{E_{\infty}} \left(\frac{r_E + 1}{r_E} \right) - \frac{1}{E_{\infty}} E_{\beta_E} \left(- \frac{1}{r_E} \left(t_R / \tau_E \right)^{\beta_E} \right), \quad (87)$$

sendo t_R o tempo reduzido apresentado conforme a equação (3). As Eqs. (86) e (87) podem ser empregadas na obtenção da tensão e/ou deformação uniaxial, em qualquer temperatura T , a partir dos módulos de relaxação e fluência, respectivamente.

Similarmente, partindo da equação (73), obtém-se modelos para os módulos de relaxação de cisalhamento e módulo de fluência de cisalhamento, considerando influência da temperatura, segundo

$$G(T, t) = G_{\infty} \left[1 + r_G E_{\beta_G} \left(- \left(t_R / \tau_G \right)^{\beta_G} \right) \right] \quad (88)$$

e

$$J(T, t) = \frac{1}{G_{\infty}} \left(\frac{r_G + 1}{r_G} \right) - \frac{1}{G_{\infty}} E_{\beta_G} \left(- \frac{1}{r_G} \left(t_R / \tau_G \right)^{\beta_G} \right), \quad (89)$$

onde $E_{\beta_G}(\cdot)$ é a função de ML de um parâmetro de ordem β_G . Analogamente, tendo como base as Eqs. (88) e (89) pode-se obter a tensão e/ou deformação cisalhamento, em qualquer temperatura T , a partir dos módulos de relaxação de cisalhamento e fluência de cisalhamento, respectivamente.

Analisando as relações apresentadas nesta seção, nota-se que as interconversões relaxação-fluência podem facilmente ser realizadas, considerando ensaios uniaxiais e de cisalhamentos. Para tanto, faz-se necessária a identificação completa dos parâmetros viscoelásticos apenas em relaxação (ou em fluência).

3.4.4 Proposta de modelo para coeficiente de Poisson: domínio do tempo

Aplicando a TIL na equação (62), obtém-se o coeficiente de Poisson conforme a equação (2) e repetida, a seguir, na forma

$$v(t) = \frac{1}{2} \left[E_0 J(t) - 2 + \int_0^t \left(\frac{dE(t)}{d\xi} J(t-\xi) \right) d\xi \right]. \quad (90)$$

Percebe-se que a obtenção do coeficiente de Poisson indiretamente por meio da equação (90), em modelos constitutivos complexos, requer o uso de métodos numéricos, o que pode tornar o processo muito caro computacionalmente e obter resultados pouco acurados (TSCHOEGL; KNAUSS; EMRI, 2002; CHEN; YANG; LAI, 2012; CINIELLO, 2016).

A metodologia para obter o coeficiente de Poisson de maneira mais simples e eficiente é aplicando a TIL diretamente à equação (79). No entanto, a obtenção da TIL do termo entre colchetes não é trivial. Assim, utiliza-se um artifício matemático no qual expande-se tal termo em frações parciais segundo

$$\tilde{v}(s) = \frac{E_\infty}{2G_\infty} \left[A + \frac{Bs^{\beta_E}}{(\tau_E^{\beta_E} s^{\beta_E} + 1)} + \frac{Cs^{\beta_G}}{(r_G \tau_G^{\beta_G} s^{\beta_G} + 1)} + \frac{Ds^{\beta_E + \beta_G}}{(\tau_E^{\beta_E} s^{\beta_E} + 1)(r_G \tau_G^{\beta_G} s^{\beta_G} + 1)} \right] - 1. \quad (91)$$

Das equações (79) e (91), obtém-se $A=1$, $B = \tau_E^{\beta_E} (r_E - 1)$, $C = \tau_G^{\beta_G} (1 - r_G)$ e $D = \tau_E^{\beta_E} \tau_G^{\beta_G} (r_G - 1)(r_E - 1)$. Como $\tilde{v}(s) = s v(s)$, a equação (91) pode ser reescrita como

$$v(s) = \frac{E_\infty}{2G_\infty} \left[A \left(\frac{1}{s} \right) + \frac{B}{\tau_E^{\beta_E}} \left(\frac{s^{\beta_E - 1}}{(s^{\beta_E} + 1/\tau_E^{\beta_E})} \right) + \frac{C}{r_G \tau_G^{\beta_G}} \left(\frac{s^{\beta_G - 1}}{(s^{\beta_G} + 1/r_G \tau_G^{\beta_G})} \right) + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{D}{\tau_E^{\beta_E} r_G \tau_G^{\beta_G}} \left(\frac{s^{\beta_E + \beta_G - 1}}{(s^{\beta_E} + 1/\tau_E^{\beta_E})(s^{\beta_G} + 1/r_G \tau_G^{\beta_G})} \right) \right] - \left(\frac{1}{s} \right). \quad (92)$$

Portanto, a TIL da equação (92) pode ser posta conforme

$$v(t) = \frac{E_\infty}{2G_\infty} \left[A + \frac{B}{\tau_E^{\beta_E}} E_{\beta_E}(\tau_E^{\beta_E} t^{\beta_E}) + \frac{C}{r_G \tau_G^{\beta_G}} E_{\beta_G}(r_G \tau_G^{\beta_G} t^{\beta_G}) + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{D}{\tau_E^{\beta_E} r_G \tau_G^{\beta_G}} \int_0^\xi \left(E_{\beta_E}(-(\xi - t)^{\beta_E} / \tau_E^{\beta_E}) E_{\beta_G}(-t^{\beta_G} / r_G \tau_G^{\beta_G}) \right) dt \right] - 1, \quad (93)$$

sendo $E_{\beta(\cdot)}(\cdot)$ a função de Mittag-Leffler (ML) do parâmetro de ordem $\beta(\cdot)$. Nota-se que a equação (93) requer a integração do produto de duas funções do tipo ML de ordens de diferenciação distintas, cuja solução analítica é de difícil obtenção. Uma possível solução a essa questão é a integração numérica, a qual é significativamente onerosa do ponto de vista computacional.

No entanto, como posto na seção 3.4.2, as funções viscoelásticas de ordem fracionária, considerando ensaios de tração uniaxial e de cisalhamento, possuem valores de ordem de diferenciação muito próximos, ou seja, $\beta \cong \beta_E \cong \beta_G$ (CHEN et al., 2017; SOUSA; SILVA; PEREIRA, 2018). Assim, a equação (79) pode ser reescrita como

$$\tilde{v}(s) = \frac{E_\infty}{2G_\infty} \left[\frac{(r_E \tau_E^\beta \tau_G^\beta) s^{2\beta} + (r_E \tau_E^\beta + \tau_G^\beta) s^\beta + 1}{(\tau_E^\beta s^\beta + 1)(r_G \tau_G^\beta s^\beta + 1)} \right] - 1. \quad (94)$$

Expandindo a equação (94) em frações parciais, chega-se

$$\tilde{v}(s) = \frac{E_\infty}{2G_\infty} \left\{ 1 + B \frac{s^\beta}{(\tau_E^\beta s^\beta + 1)} + C \frac{s^\beta}{(r_G \tau_G^\beta s^\beta + 1)} \right\} - 1, \quad (95)$$

onde os novos valores de B e C são dados por:

$$B = \tau_G^\beta (1 - r_G) + \tau_E^\beta (-1 + r_E) + \left(\tau_G^\beta (\tau_G^\beta r_G^2 - \tau_E^\beta r_E r_G - \tau_G^\beta r_G + \tau_E^\beta r_E) \right) / (b_G r_G - \tau_E^\beta);$$

$$C = \left(\tau_G^\beta (\tau_G^\beta r_G^2 - \tau_E^\beta r_E r_G - \tau_G^\beta r_G + \tau_E^\beta r_E) \right) / (b_G r_G - \tau_E^\beta).$$

Como $\tilde{v}(s) = s v(s)$, a equação (95) pode ser reescrita como

$$v(s) = \frac{\bar{E}_0}{2\bar{G}_0} \left\{ \frac{1}{s} + B \frac{s^{\beta-1}}{(\tau_E^\beta s^\beta + 1)} + C \frac{s^{\beta-1}}{(r_G \tau_G^\beta s^\beta + 1)} \right\} - \frac{1}{s}. \quad (96)$$

Aplicando a TIL à equação (96), obtém-se o modelo matemático para a função coeficiente de Poisson, no domínio do tempo, na forma

$$v(t) = \frac{E_\infty}{2G_\infty} \left[1 + \left(\frac{B}{\tau_E^\beta} \right) \left(E_\beta \left(-t^\beta / \tau_E^\beta \right) \right) + \left(\frac{C}{r_G \tau_G^\beta} \right) \left(E_\beta \left(-t^\beta / r_G \tau_G^\beta \right) \right) \right] - 1. \quad (97)$$

A função obtida, equação (97), representa o modelo proposto para o coeficiente de Poisson no domínio do tempo. A partir do qual se pode obter o valor do coeficiente de Poisson para qualquer tempo e qualquer temperatura empregando o tempo reduzido t_R , equação (3).

Utilizando as relações da função de ML (MAINARD, 2010), infere-se que, quando $t \rightarrow \infty$, tem-se que o coeficiente de Poisson de equilíbrio, ν_∞ , é dado por

$$\nu_\infty = \nu(t \rightarrow \infty) = \frac{E_\infty}{2G_\infty} - 1. \quad (98)$$

Por outro lado, quando $t \rightarrow 0$, a equação (97) torna-se

$$\nu(t \rightarrow 0) = \frac{E_\infty r_E}{2G_\infty r_G} - 1. \quad (99)$$

Como definido anteriormente, $E_0 = E_\infty r_E$ e $G_0 = G_\infty r_G$. Essas relações, quando substituídas na equação (99), possibilitam a definição do valor do coeficiente de Poisson instantâneo, ν_0 , como

$$\nu_0 = \nu(t \rightarrow 0) = \frac{E_0}{2G_0} - 1, \quad (100)$$

onde E_0 e G_0 são os valores dos módulos instantâneos para quando $t \rightarrow 0$.

3.4.5 Resumo das principais funções viscoelásticas

As funções viscoelásticas descritas até aqui em conjunto com o modelo de Zener fracionário, formam a base com a qual é possível prever o comportamento mecânico de MVEs lineares e termorreologicamente simples. Nota-se que na viscoelasticidade linear para representar materiais isotrópicos, em geral, existem seis diferentes funções para modelar o comportamento mecânico de um MVE no domínio do tempo. Entre estas, três envolvem excitação de tensão (ou força) e três excitação de deformação (ou deslocamento). Além disso, tem-se a mesma quantidade de funções para descrever o comportamento viscoelástico no domínio da frequência (EMRI et al., 2012). Estas funções viscoelásticas são listadas de forma resumida na TABELA 2.

TABELA 2 - TABELA-RESUMO COM AS PRINCIPAIS FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS

Domínio do tempo				Domínio da frequência		
	Relaxação	Fluência	Poisson	Relaxação	Fluência	Poisson
Longitudinal	$E(t)$	$D(t)$	$\nu(t)$	$E^*(\Omega)$	$D^*(\Omega)$	$\nu^*(\Omega)$
Volumétrico	$K(t)$	$B(t)$		$K^*(\Omega)$	$B^*(\Omega)$	
Cisalhamento	$G(t)$	$J(t)$		$G^*(\Omega)$	$J^*(\Omega)$	

FONTE: Tschoegl (1989).

3.5 OTIMIZAÇÃO

Na literatura, é frequente o emprego de técnicas de otimização no processo de caracterização de propriedades de sistemas. De acordo com Hassani e Hinton (1999), técnicas de otimização são um conjunto de processos racionais e iterativos que buscam o projeto ótimo de um sistema considerando uma determinada função objetivo e um conjunto de restrições. Não há um método único disponível que resolva todos os problemas de otimização eficientemente e, por isso, diferentes métodos têm sido desenvolvidos para resolver diversos tipos de problemas. Os métodos para solução de problemas de otimização podem ser divididos, basicamente, em dois grupos, sendo eles, os métodos determinísticos e os estocásticos.

Métodos determinísticos são, em geral, baseados nos cálculos de derivadas de primeira e/ou segunda ordem ou de aproximações destas, a partir destas derivadas. Por outro lado, os métodos baseados em algoritmos estocásticos introduzem no processo de otimização dados e parâmetros randômicos resolvendo o problema de um ponto de vista probabilístico.

Segundo Arora (2014), um problema de otimização típico pode ser representado na seguinte forma padrão:

$$\text{Encontrar } \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_{nvars}), \quad (101)$$

tal que minimize uma função, $f(\mathbf{x})$, sujeita a “p” restrições de igualdade

$$h_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{para } i=1, \dots, p), \quad (102)$$

e a “q” restrições de desigualdade

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0 \quad (\text{para } j=1, \dots, q). \quad (103)$$

A variável \mathbf{x} , de dimensão 'nvars', é denominada de vetor de variáveis de projeto, ao passo que $f(\mathbf{x})$ é denominada função objetivo.

Neste trabalho, serão aplicadas técnicas de otimização, as quais estarão incorporadas às rotinas implementadas no ambiente MatLab® que visam a caracterização do material. A abordagem utilizada é a de otimização híbrida, a qual combina dois ou mais métodos de solução de problemas de otimização. Neste caso, inicialmente resolve-se o problema aplicando a técnica de Algoritmos Genéticos (AGs) e, em seguida, esse resultado é melhorado por meio de um algoritmo determinístico de Programação Não Linear (PNL).

Segundo Goldberg (1989) e Arora (2014), um AG é uma técnica de busca utilizada em computação para obter soluções ótimas aproximadas em problemas de otimização. Os AGs são uma classe particular dos algoritmos evolutivos, os quais utilizam estratégias inspiradas pela biologia evolutiva, proposta por Charles Darwin. Essa técnica considera conceitos como hereditariedade, aptidão, mutação, seleção natural e recombinação.

O funcionamento dos AGs é baseado na analogia com a teoria relacionada à evolução das espécies. Nesse caso, um AG possui os seguintes passos básicos:

- ✓ Inicialmente, gera-se uma população formada por um conjunto aleatório de indivíduos, que podem ser vistos como possíveis soluções do problema;
- ✓ Durante o processo evolutivo, avalia-se a população, sendo que para cada indivíduo é atribuída uma nota (denominada aptidão), relacionada ao valor da função objetivo e que reflete sua habilidade de adaptação a determinado ambiente;
- ✓ Por meio da aptidão, uma percentagem dos indivíduos é mantida, enquanto os outros são descartados;
- ✓ Os indivíduos mantidos pela seleção podem sofrer modificações em suas características fundamentais por meio de cruzamentos, mutações ou recombinação genética gerando descendentes para a próxima geração;
- ✓ Este processo, denominado reprodução, é repetido até que uma solução satisfatória seja encontrada.

Esse algoritmo é complexo o suficiente para fornecer poderosos e robustos mecanismos de busca em problemas de otimização global. A implementação do AG

é feita no programa MatLab®. Dessa forma, o problema padrão, via AG, pode ser definido na forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar } f(\mathbf{x}) \\ \text{com } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{nvars} \\ \text{e} \\ \text{Restrições : } \{ \mathbf{x}_{li} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{ls} \end{array} \right. , \quad (104)$$

onde 'nvars' é o número total de variáveis de projeto, enquanto \mathbf{x}_{li} e \mathbf{x}_{ls} são os vetores contendo os limites inferior e superior, respectivamente, do vetor de variáveis de projeto \mathbf{x} .

Por sua vez, a PNL visa encontrar o mínimo de uma função não-linear com restrições. O conjunto de rotinas de PNL se encontra implementado no ambiente MatLab® com auxílio da função 'optimset', a qual cria a estrutura de otimização necessária para executar a rotina de otimização propriamente dita: 'fmincon.m'. Nessa rotina, o problema padrão de otimização pode ser definido conforme a equação (104).

4 METODOLOGIA PROPOSTA DE IDENTIFICAÇÃO DE MVES NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

A metodologia proposta se baseia na leitura de um conjunto de pontos experimentais referentes às curvas características do material, sendo elas, funções viscoelásticas complexas (de Young e de cisalhamento), definidas no domínio da frequência. Na sequência, são construídos problemas padrão de otimização com vista a minimizar uma função que meça a distância relativa entre as curvas experimentais e suas respectivas curvas teóricas, variando os parâmetros característicos do modelo constitutivo de Zener fracionário. O objetivo é caracterizar funções viscoelásticas (módulos de Young, de cisalhamento e volumétrico e coeficiente complexo de Poisson), definidas no domínio da frequência. Com isso, a partir dos parâmetros viscoelásticos obtidos, podem-se obter outras funções viscoelásticas correspondentes, definidas no domínio do tempo, utilizando conceitos de interconversão.

4.1 DADOS EXPERIMENTAIS

No presente trabalho, o material em estudo é o EAR[®] C-1002. Trata-se de um polímero elastômero, conhecido comercialmente como ISODAMP C-1002, fabricado pela EAR[®] Specialty Composites (Indianápolis, EUA) e produzido a partir de policloreto de vinila (DANDEKAR et al, 1991; SZABO e KEOUGH, 2002). Este material tem sido bastante utilizado em estudos que envolvem MVEs (ESPÍNDOLA et al., 2006; NAYFEH, 2004; BALBINO, 2012; BALBINO, 2016; SOUSA et al. 2017). Neste trabalho, esse MVE é assumido como sendo isotrópico, homogêneo, linear e termorreologicamente simples.

Visando a obtenção de dados experimentais, Jones (1992) toma um conjunto de amostras desse material e as envia para alguns laboratórios do mundo (denominados genericamente de Laboratório A até Laboratório T). Esses laboratórios tem a missão de realizar testes experimentais envolvendo os módulos complexos (Young e cisalhamento) no domínio da frequência, considerando os efeitos da temperatura.

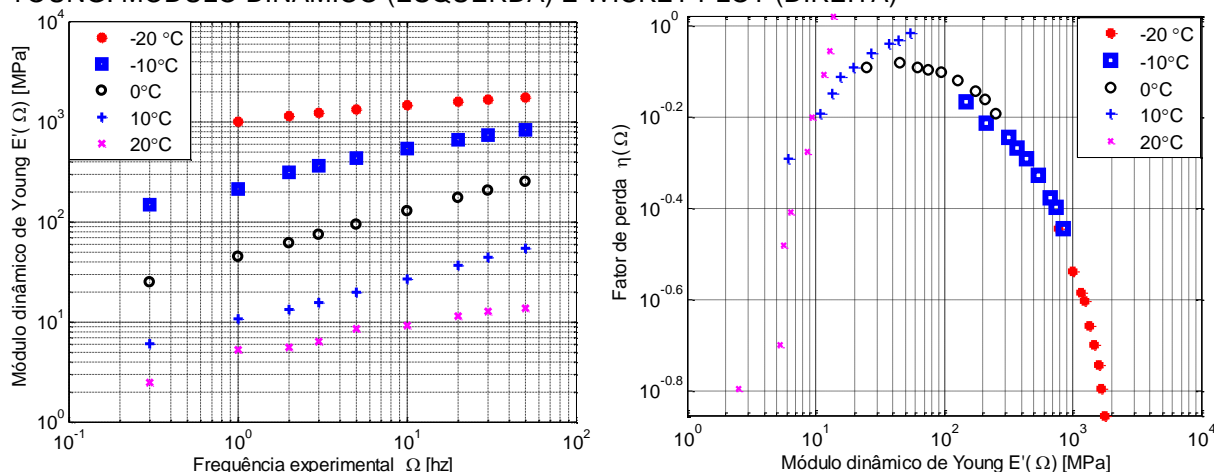
O presente trabalho analisou os dados experimentais de todos os laboratórios e tomando como base a teoria da viscoelasticidade linear (FERRY, 1980; TSCHOEGL, 1989; BRINSON e BRINSON, 2008; MAINARDI 2010), e visando avaliar

a metodologia de identificação aqui proposta, o presente trabalho utiliza os dados experimentais apresentados pelos laboratórios C e E, assim denominados no trabalho de Jones (1992).

Visualizações gráficas dos experimentais são apresentadas da FIGURA 13 a FIGURA 16, em que o gráfico do lado esquerdo de cada figura representa o módulo dinâmico em várias temperaturas em determinadas faixas de frequências, bem como o gráfico do lado direito de cada figura representa o wicket plot (fator de perda versus módulo dinâmico) em diferentes temperaturas.

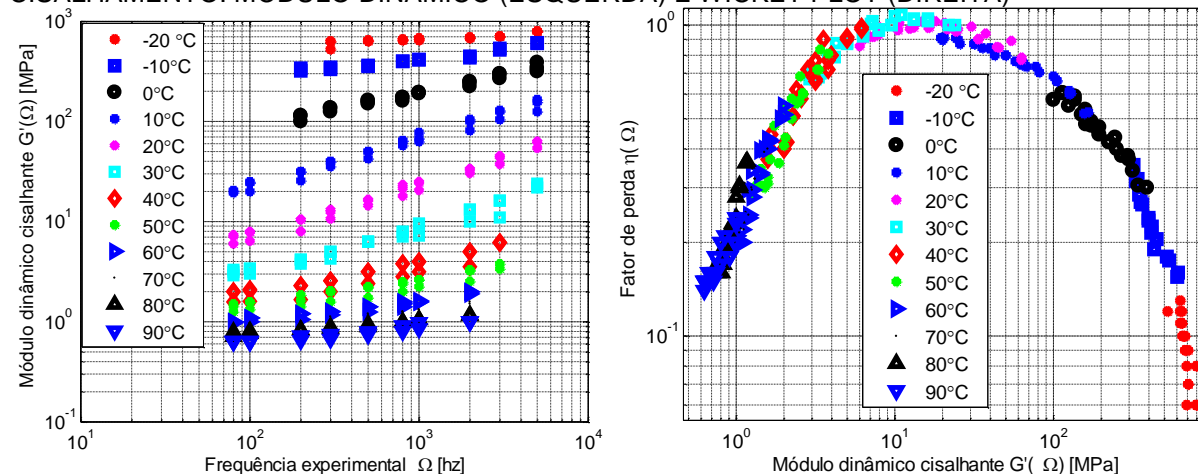
A partir dos experimentos disponíveis é possível, empregando técnicas de otimização, identificar o material usando o modelo Zener fracionário, seja pelo método tradicional ou pelo método proposto, aqui denominado 'método integrado'.

FIGURA 13 - LABORATÓRIO C. DADOS EXPERIMENTAIS PARA O MÓDULO COMPLEXO DE YOUNG: MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)



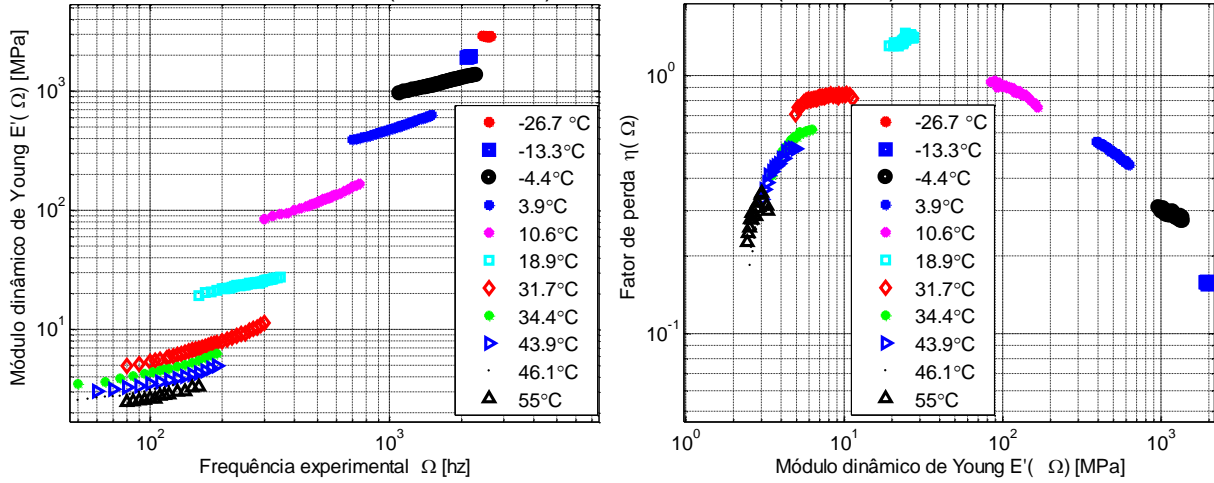
FONTE: O autor (2018).

FIGURA 14 - LABORATÓRIO C. DADOS EXPERIMENTAIS PARA O MÓDULO COMPLEXO DE CISALHAMENTO: MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)



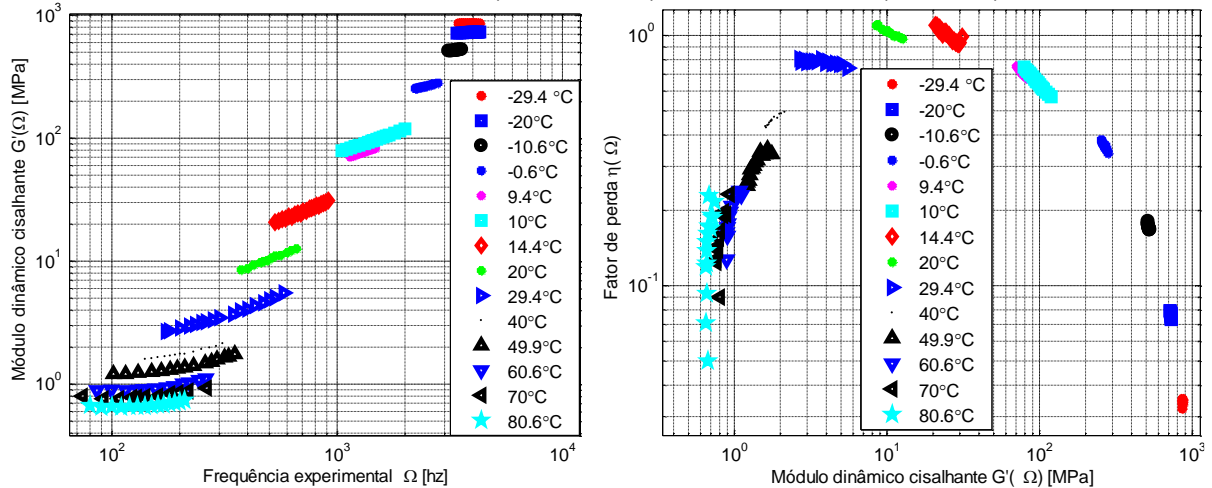
FONTE: O autor (2018).

FIGURA 15 - LABORATÓRIO E. DADOS EXPERIMENTAIS PARA O MÓDULO COMPLEXO DE YOUNG: MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)



FONTE: O autor (2018).

FIGURA 16 - LABORATÓRIO E. DADOS EXPERIMENTAIS PARA O MÓDULO COMPLEXO DE CISALHAMENTO: MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)



FONTE: O autor (2018).

4.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA PADRÃO DE OTIMIZAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA: METODOLOGIAS TRADICIONAL E INTEGRADA

Com o objetivo de realizar a identificação completa do MVE em análise, inicialmente, realiza-se a aquisição do conjunto de pontos experimentais. Na sequência, constrói-se o problema padrão de otimização com o objetivo de minimizar uma função que representa uma medida da distância relativa entre as curvas experimentais e suas respectivas curvas teóricas descritas pelo modelo de Zener fracionário. Com isso, é possível obter indiretamente o coeficiente complexo de Poisson, equação (83), por meio dos módulos complexos de Young e de cisalhamento, equações (80) e (81).

Considerando ensaios em tração uniaxiais para o **módulo complexo de Young** (FIGURA 13 ou FIGURA 15), é construída uma função distância relativa entre o modelo, $E^*(\Omega, T)$, e os dados experimentais, $E_{\text{exp}}^*(\Omega, T)$, apresentados em forma discreta. Assim, tem-se a kj -ésima componente da distância, denotada DE_{kj}^* , obtida a partir das diferenças quadráticas entre as curvas na j -ésima temperatura e avaliada na k -ésima frequência, dada por

$$(DE_{kj}^*) = \left(\frac{(E_{\text{exp}}^*(\Omega_k, T_j) - E^*(\Omega_k, T_j))}{E_{\text{exp}}^*(\Omega_k, T_j)} \right), \quad (105)$$

onde $1 \leq j \leq nT$, $1 \leq k \leq nF_j$, nT é a quantidade de curvas avaliadas nas diferentes temperaturas e nF_j é o número de pontos amostrados em diferentes frequências (na j -ésima temperatura). Em consequência, o valor escalar e real que representa uma medida quadrática relativa global da distância para todos os pontos, $(DE_{\text{tot}})^2$, pode ser posto como

$$(DE_{\text{tot}})^2 = \frac{1}{nT} \sum_{j=1}^{nT} \sum_{k=1}^{nF_j} \frac{1}{nF_j} (DE_{kj}^*) (DE_{kj}^*)' = \frac{1}{nT} \sum_{j=1}^{nT} \sum_{k=1}^{nF_j} \frac{1}{nF_j} (DE_{kj}^2). \quad (106)$$

Nesse caso, $(\bullet)'$ representa o número complexo conjugado de (\bullet) .

Similarmente, para um conjunto de ensaios em **cisalhamento puro** (FIGURA 14 ou FIGURA 16), a kj -ésima distância relativa associada a cada ponto experimental, pode ser obtida por

$$(DG_{kj}^*) = \left(\frac{(G_{\text{exp}}^*(\Omega_k, T_j) - G^*(\Omega_k, T_j))}{G_{\text{exp}}^*(\Omega_k, T_j)} \right). \quad (107)$$

Como resultado, a medida quadrática global da distância relativa para todos os pontos e curvas de temperaturas, pode ser posta como

$$(DG_{\text{tot}})^2 = \frac{1}{nT} \sum_{j=1}^{nT} \sum_{k=1}^{nF_j} \left[\frac{1}{nF_j} (DG_{kj}^*) (DG_{kj}^*)' \right] = \frac{1}{nT} \sum_{j=1}^{nT} \sum_{k=1}^{nF_j} \left[\frac{1}{nF_j} (DG_{kj})^2 \right]. \quad (108)$$

Assim, definidas as duas funções, equações (106) e (108), tem-se que o problema padrão de otimização para a identificação dos parâmetros constitutivos viscoelásticos pode ser formulado através de duas metodologias distintas: **método tradicional** ou **método integrado**.

4.2.1 Metodologia tradicional de identificação de MVEs no domínio da frequência

Neste primeiro método, cada função viscoelástica complexa é identificada individualmente. Assim, considerando o módulo complexo de Young, o problema padrão de otimização, no domínio da frequência, pode ser escrito como

$$P\Omega_E : \begin{cases} \text{Minimizar} & (DE_{\text{tot}})^2(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}, \\ \text{onde} & \mathbf{x} = (\bar{E}_\infty, \bar{E}_0, b_E, \beta_E^\Omega, C_{E,1}^{\Omega T}, C_{E,2}^{\Omega T}), \\ \text{Restrições} & : \mathbf{x}^{\text{inf}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{sup}}, \end{cases} \quad (109)$$

onde os sobrescritos ‘inf’ e ‘sup’ indicam, respectivamente, o vetor com valores limites inferiores e superiores para as variáveis de projeto, $C_{E,1}^{\Omega T}$ e $C_{E,2}^{\Omega T}$ são as constantes do modelo WLF, associadas ao módulo complexo de Young no domínio da frequência. Esse modelo é apresentado na seção 3.1.4, bem como as motivações para empregá-lo na identificação do MVE.

Ademais, para a identificação do módulo complexo de cisalhamento, o problema padrão de otimização pode ser escrito como

$$P\Omega_G : \begin{cases} \text{Minimizar} & (DG_{\text{tot}})^2(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}, \\ \text{onde} & \mathbf{x} = (\bar{G}_\infty, \bar{G}_0, b_G, \beta_G^\Omega, C_{G,1}^{\Omega T}, C_{G,2}^{\Omega T}), \\ \text{Restrições} & : \mathbf{x}^{\text{inf}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{sup}}, \end{cases} \quad (110)$$

onde $C_{G,1}^{\Omega T}$ e $C_{G,2}^{\Omega T}$ são as constantes do modelo WLF, considerando o módulo complexo de cisalhamento, no domínio da frequência.

Na implementação deste método, os valores obtidos para as constantes, associadas às ordens de diferenciação (β_E^Ω e β_G^Ω) e aos efeitos da temperatura seguindo o modelo WLF ($C_{E,1}^{\Omega T}$, $C_{E,2}^{\Omega T}$, $C_{G,1}^{\Omega T}$ e $C_{G,2}^{\Omega T}$), são distintos, para os módulos complexos de Young e de cisalhamento. Nesse contexto, na obtenção do coeficiente complexo de Poisson e do módulo volumétrico complexo, este trabalho define um

valor médio para cada uma dessas constantes. Assim, a ordem de diferenciação, β^Ω , associada ao MVE é dada por

$$\beta^\Omega = \frac{\beta_E^\Omega + \beta_G^\Omega}{2} \quad (111)$$

Outrossim, as constantes relativas ao modelo WLF podem ser obtidas por

$$C_1^{\Omega T} = \frac{C_{E,1}^{\Omega T} + C_{G,1}^{\Omega T}}{2} \quad \text{e} \quad C_2^{\Omega T} = \frac{C_{G,2}^{\Omega T} + C_{G,2}^{\Omega T}}{2}. \quad (112)$$

Consolidada a identificação das propriedades viscoelásticas dos módulos complexos (de Young e de cisalhamento), emprega-se a equação (69) (ou (83)) e, com isso, é obtido o coeficiente complexo de Poisson, para o domínio da frequência.

4.2.2 Metodologia integrada de identificação de MVEs no domínio da frequência

A metodologia proposta no presente trabalho consiste no agrupamento de parâmetros comuns dos módulos complexos de Young e de cisalhamento e no estabelecimento de um processo híbrido de otimização. Para tal, de acordo com Ernst et al. (2003), Lakes and Wineman (2006), O'Brien et al. (2007) e Chen et al. (2017), considera-se que a influência da temperatura e as ordens de diferenciação são as mesmas para os módulos complexos de Young e de cisalhamento. Conforme posto por Waterman (1977), Tschoegl (1989) e Pritz (1998), o coeficiente de Poisson de um material borrachoso só possui significados físicos quando sua parcela real é definida no intervalo entre 0 e 0,5. Além disso, como mostrado teoricamente, esta função é monotonicamente decrescente, ao longo da frequência.

Nesse contexto, considerando que a distância relativa quadrática global que considera os ensaios de tração uniaxial e cisalhamento puro, no domínio da frequência, pode ser posta como

$$(\text{DEG}_{\text{tot}})^2 = \frac{(\text{DE}_{\text{tot}})^2 + (\text{DG}_{\text{tot}})^2}{2}, \quad (113)$$

o problema padrão de otimização para a metodologia proposta pode ser formulado matematicamente como

$$P_{\Omega_{EG}} : \begin{cases} \text{Minimizar } (\text{DEG}_{\text{tot}})^2(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}; \\ \text{onde } \mathbf{x} = (\bar{E}_{\infty}, \bar{E}_0, b_E, \bar{G}_{\infty}, \bar{G}_0, b_G, \beta, C_{EG1}^T, C_{EG2}^T); \\ \text{Restrições: } \begin{cases} \mathbf{x}^{\text{inf}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{sup}}; \\ \varepsilon_v < \text{Re}[v^*(\Omega, T)] < 0,5 - \varepsilon_v; \\ (dv'(\Omega, T)/d\Omega) < 0. \end{cases} \end{cases} \quad (114)$$

Na equação (114), ε_v é uma constante arbitrária e pequena (aqui, $\varepsilon_v = 0,001$) inserida com o intuito de se definir um espaço de projetos fechado e, portanto, garantir a existência de um ponto de projeto ótimo global, como posto pelo Teorema de Weierstrass (ARORA, 2014).

A solução numérica do problema, equação (114), através de um método híbrido de otimização permite a completa especificação dos parâmetros do MVE. De modo análogo, ao da seção anterior, pode ser obtidos indiretamente o coeficiente complexo de Poisson, bem como o módulo complexo volumétrico pode ser obtido indiretamente empregando a equação (69) ou a equação (83).

4.2.3 Estrutura computacional no domínio da frequência

A implementação computacional é realizada em ambiente MATLAB® conforme o algoritmo apresentado na FIGURA 17. O processo de caracterização do MVE é fundamentado na solução numérica de um problema de otimização através de uma técnica de otimização híbrida. Nesta técnica, inicialmente, os parâmetros materiais ótimos, próximos do ótimo global, são obtidos via AG. Em seguida, tendo como ponto de partida o vetor de variáveis de projeto encontrado via AGs, um algoritmo determinístico de PNL é aplicado de modo a determinar os parâmetros materiais com uma maior precisão. Como cada processo de otimização por AG é randômico e diferentes vetores ótimos podem ser obtidos, este trabalho realiza 10 processos de otimização AG seguidos de PNL. Adicionalmente, em todos os processos de otimização por AG, é empregada a sub-rotina *ga.m* com uma população de 1000 indivíduos, 2000 gerações e taxa de mutação de 0,09. Ademais, em PNL, é utilizada a sub-rotina *fmincon.m* com número máximo de iterações igual a 1000, número máximo de avaliações da função objetivo de 10000 e critério de parada (*TolFun*) de 1.0E-11.

Para o processo de otimização, os limites simples para os parâmetros relacionados ao modelo de Zener fracionário e as constantes relativas ao modelo WLF, para o fator de deslocamento, estão listados na TABELA 3. Estes limites foram baseados em experimentos numéricos, de modo que os limites superiores e/ou inferiores não fossem atingidos no ponto de ótimo.

O procedimento computacional aqui descrito é aplicado na identificação de MVEs empregando as metodologias tradicional e integrada. Análises de cada método empregando a metodologia híbrida de otimização, apresentadas nesta seção, são discutidas mais adiante no capítulo de resultados e discussões.

FIGURA 17 - ESTRUTURA DO ALGORITMO IMPLEMENTADO EM AMBIENTE MATLAB®

Implementação numérica:
 Passo 1. Definição do material e obtenção de dados experimentais;
 Passo 2. Definição dos limites de variáveis de projeto;
 Passo 3. Para cada processo de otimização i ($i = 1, \dots, \text{NPO}$, onde NPO é o número de processo de otimização), faça
 Passo 3.1. Aproximação do ponto de mínimo global por AG.
 a) Definição dos parâmetros a serem utilizados por AG em MatLab®.
 b) Otimização por AG.
 c) Aproximação do ótimo global por AG, \mathbf{X}_{AG} .
 Passo 3.2. Refin da aproximação do ponto de mínimo global por PNL em MatLab®.
 a) Definição de parâmetros a serem utilizados em MatLab®.
 b) Otimização por PNL e obtenção de $\mathbf{X}_{PNL}(i)$ (Ponto inicial: $\mathbf{X}_{AG}(i)$).
 Passo 4. Definição como ponto de ótimo o melhor ponto de \mathbf{X}_{PNL} .
 Passo 5. Apresentação dos resultados.

FONTE: O autor (2018).

TABELA 3 - LIMITES DAS PROPRIEDADES MATERIAIS UTILIZADOS NO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO: DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Variável	Nomenclatura	Limites dos intervalos
Constante material WLF 1	$C_{E1}^T, C_{G1}^T, C_{EG1}^T$	$[0; 100]$
Constante material WLF 2 $[^{\circ}\text{C}]$	$C_{E2}^T, C_{G2}^T, C_{EG2}^T$	$[0; 200]$
Módulo de equilíbrio $[\text{Pa}]$	\bar{E}_0, \bar{G}_0	$[10^3; 10^7]$
Módulo instantâneo $[\text{Pa}]$	$\bar{E}_{\infty}, \bar{G}_{\infty}$	$[10^7; 10^{10}]$
Parâmetro relacionado ao tempo de relaxação $[\text{s}^{\beta}]$	b_E, b_G	$[10^{-4}; 10^{-1}]$
Ordem de diferenciação	β_E, β_G, β	$[0,01; 0,99]$

FONTE: O autor (2018).

5 METODOLOGIA PROPOSTA DE IDENTIFICAÇÃO DE MVES NO DOMÍNIO DO TEMPO

Este capítulo tem como meta apresentar a metodologia cujo objetivo é caracterizar funções viscoelásticas, definidas no domínio do tempo, e por interconversão obter outras funções viscoelásticas, definidas no domínio da frequência. Bem como podem ser realizadas facilmente, interconversões relaxação-fluência. A metodologia proposta é baseada na leitura de um conjunto de pontos experimentais referentes às curvas associadas aos módulos de relaxação (Young e de cisalhamento), no domínio do tempo. Na sequência, são construídos problemas padrão de otimização com vista a minimizar uma função que meça a distância relativa entre as curvas experimentais e suas respectivas curvas teóricas, variando os parâmetros característicos do modelo constitutivo de Zener fracionário.

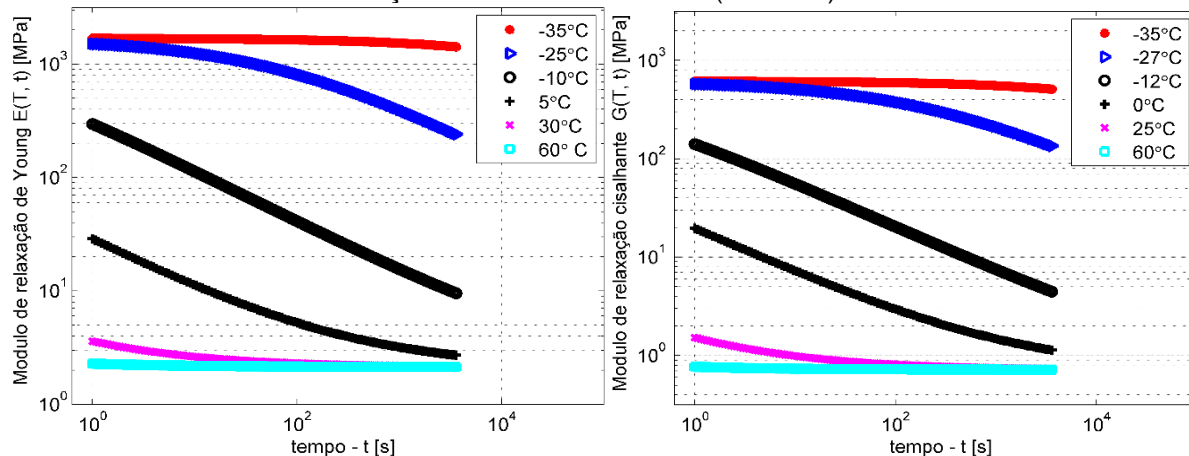
5.1 DADOS EXPERIMENTAIS

A partir das propriedades materiais identificadas por Sousa et al. (2018) para o material EAR®-C1002, foi realizada a interconversão dos parâmetros materiais para o domínio do tempo e obtidas as curvas médias para os módulos de relaxação de Young e de cisalhamento.

A partir desses valores, foram gerados dados experimentais artificiais com dispersões de 0%, 10% e de 20% em torno dessas curvas médias considerando diferentes temperaturas. Isso tem o objetivo de obter experimentos mais próximos da realidade. Deve ser salientado que, na prática, a dispersão dos dados não é uniforme considerando experimentos em diferentes temperaturas (BALBINO, 2012). Dados experimentais artificiais para valores uniformes de dispersão podem ser visualizados da FIGURA 18 à FIGURA 20.

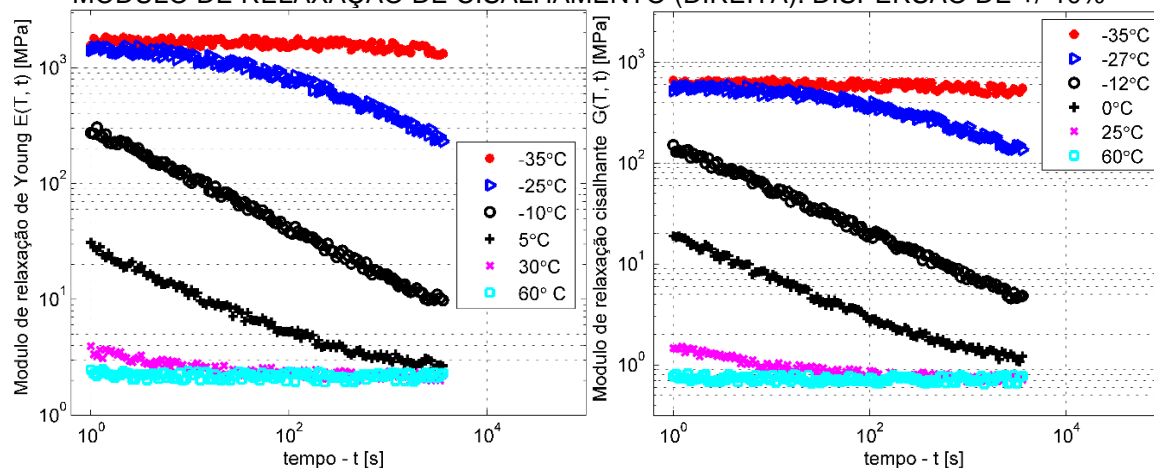
Os valores experimentais artificiais foram gerados em um intervalo de tempo condizente com um experimento físico no intervalo entre 1 e 3600 segundos. Para tanto, nesse intervalo de tempo são 'amostrados' 120 pontos (isto é, dois pontos por minuto). Igualmente, as temperaturas de "ensaios" estão adequadas aos limites elásticos de material (entre -35°C e 60°C), sendo utilizados poucos valores de temperaturas, a saber, seis temperaturas para cada 'experimento', as quais cobrem todo o intervalo da curva mestre.

FIGURA 18 - DADOS EXPERIMENTAIS ARTIFICIAIS GERADOS A PARTIR DAS PROPRIEDADES OBTIDAS POR SOUSA ET AL. (2018). MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE YOUNG (ESQUERDA); MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE CISALHAMENTO (DIREITA). DISPERSÃO DE 0%



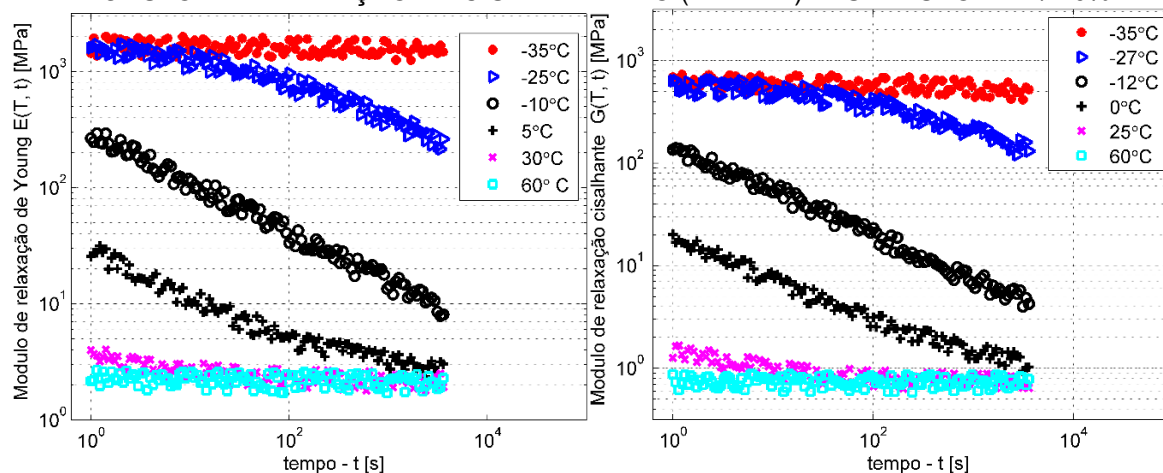
FONTE: O autor (2018).

FIGURA 19 - DADOS EXPERIMENTAIS ARTIFICIAIS GERADOS A PARTIR DAS PROPRIEDADES OBTIDAS POR SOUSA ET AL. (2018). MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE YOUNG (ESQUERDA); MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE CISALHAMENTO (DIREITA). DISPERSÃO DE $\pm 10\%$



FONTE: O autor (2018).

FIGURA 20 - DADOS EXPERIMENTAIS ARTIFICIAIS GERADOS A PARTIR DAS PROPRIEDADES OBTIDAS POR SOUSA ET AL. (2018). MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE YOUNG (ESQUERDA); MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE CISALHAMENTO (DIREITA). DISPERSÃO DE $\pm 20\%$



FONTE: O autor (2018).

Assim, tendo como base os experimentos disponíveis, o MVE pode ser identificado empregando o modelo Zener fracionário, seja por uma metodologia tradicional ou pelo método proposto, aqui denominado 'metodologia integrada'.

5.2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA PADRÃO DE OTIMIZAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO: METODOLOGIAS TRADICIONAL E INTEGRADA

Cada ponto experimental do módulo de relaxação de Young pode ser representado por $E^{\text{exp}}(t_k, T_j)$, na j -ésima temperatura, a qual varia entre $1 \leq j \leq nT$, e no k -ésimo tempo, estando no intervalo $1 \leq k \leq nPt_j$. Nesses casos, nPt_j é o número total de pontos experimentais de tempo na j -ésima temperatura e nT é o número total de temperaturas. Dado o modelo do material, $E(t_k, T_j)$, a kj -ésima componente do erro definido no domínio do tempo, denotada erroEt_{kj} , é explicitada como

$$(\text{erroEt}_{kj})^2 = \left(\frac{E^{\text{exp}}(t_k, T_j) - E(t_k, T_j)}{E^{\text{exp}}(t_k, T_j)} \right)^2, \quad (115)$$

onde o sobrescrito 'exp' indica que o dado é experimental. Assim, o erro resultante de todas as curvas, considerando o módulo uniaxial em relaxação, erroEt_R , é dado por

$$(\text{erroEt}_R)^2 = \frac{1}{nT} \sum_{j=1}^{nT} \sum_{k=1}^{nPt_j} \left(\frac{1}{nPt_j} \text{erroEt}_{kj} \right)^2. \quad (116)$$

Ademais, em ensaios de relaxação de cisalhamento, cada ponto experimental do módulo pode ser representado por $G^{\text{exp}}(t_k, T_j)$. Assim, dado o modelo constitutivo do material, $G(t_k, T_j)$, a kj -ésima componente do erro no domínio do tempo, denotada erroGt_{kj} , é dada na forma

$$(\text{erroGt}_{kj})^2 = \left(\frac{G^{\text{Exp}}(t_k, T_j) - G(t_k, T_j)}{G^{\text{Exp}}(t_k, T_j)} \right)^2. \quad (117)$$

Assim, para o domínio do tempo, o erro resultante de todas as curvas, considerando relaxação em cisalhamento, erroGt_R , é dado por

$$(\text{erroGt}_R)^2 = \frac{1}{nT} \sum_{j=1}^{nT} \sum_{k=1}^{nP_{t_j}} \left(\frac{1}{nP_{t_j}} \text{erroGt}_{kj} \right)^2. \quad (118)$$

Consolidados os cálculos dos erros para os módulos de relaxação (Young e de cisalhamento), equações (116) e (118), o problema padrão de otimização pode ser formulado, no domínio do tempo, através de duas metodologias distintas, a saber, metodologia tradicional ou metodologia integrada.

5.2.1 Método tradicional de identificação de MVEs no domínio do tempo

A metodologia tradicional para identificar MVEs busca caracterizar isoladamente cada função viscoelástica de relaxação (módulo de relaxação de Young ou de cisalhamento).

Inicialmente, considerando o módulo de Young em relaxação, o problema padrão de otimização, definido no domínio do tempo, posto através do modelo constitutivo de Zener Fracionário de quatro parâmetros, pode ser formulado matematicamente como

$$Pt_E : \begin{cases} \text{Minimizar } (\text{erroEt}_R)^2(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}, \\ \text{onde } \mathbf{x} = (E_\infty, E_0, b_E, \beta_E, C_{E,1}^T, C_{E,2}^T), \\ \text{Restrições : } \mathbf{x}^{\text{inf}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{sup}}, \end{cases} \quad (119)$$

onde $C_{E,1}^T$ e $C_{E,2}^T$ são as constantes do modelo WLF, considerando o módulo de relaxação de Young.

Por sua vez, o problema padrão de otimização para a identificação individual do módulo de relaxação de cisalhamento, definido no domínio do tempo, pode ser escrito como

$$Pt_G : \begin{cases} \text{Minimizar } (\text{erroGt}_R)^2(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}, \\ \text{onde } \mathbf{x} = (G_\infty, G_0, b_G, \beta_G, C_{G,1}^T, C_{G,2}^T), \\ \text{Restrições : } \mathbf{x}^{\text{inf}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{sup}}, \end{cases} \quad (120)$$

onde $C_{G,1}^T$ e $C_{G,2}^T$ são as constantes do modelo WLF, considerando o módulo de relaxação de cisalhamento.

Note-se que, diferentemente da metodologia empregada para o domínio da frequência, não é possível a obtenção da função coeficiente de Poisson, definida no tempo, pela simples divisão ponto a ponto entre os módulos associados (Young e de cisalhamento). Uma forma de obter essa função é por meio do modelo proposto, equação (97). Nesse caso, a ordem de diferenciação, β , associada ao modelo é obtida por meio da média

$$\beta = \frac{\beta_E + \beta_G}{2}. \quad (121)$$

Além disso, as constantes relativas ao modelo WLF podem ser obtidas pelas médias

$$C_1^T = \frac{C_{1E}^T + C_{1G}^T}{2} \quad \text{e} \quad C_2^T = \frac{C_{2E}^T + C_{2G}^T}{2}. \quad (122)$$

Consolidada a identificação das propriedades viscoelásticas dos módulos de relaxação, emprega-se a equação (97) na obtenção da curva associada ao coeficiente de Poisson, definido no domínio do tempo.

5.2.2 Método integrado de identificação de MVEs no domínio do tempo

A metodologia proposta consiste em agrupar parâmetros comuns das funções módulos de relaxação (Young e cisalhamento) e no estabelecimento de um único processo híbrido de otimização. Para tanto, conforme Ernst et al. (2003), Lakes e Wineman (2006), O'Brien et al., (2007), Chen et al. (2017) e Sousa et al. (2018), considera-se que as influências da temperatura e das ordens de diferenciação são as mesmas para os módulos de relaxação em tração e em cisalhamento. Com isso, o erro quadrático total resultante, $(Et_{\text{tot}})^2$, no domínio do tempo, considerando ensaios em tração e de cisalhamento, pode ser posto como

$$(\text{erroEGt}_{\text{tot}})^2 = \frac{(\text{erroEt}_R)^2 + (\text{erroGt}_R)^2}{2}. \quad (123)$$

Além disso, de acordo com Waterman (1977), Tschoegl (1989) e Pritz (1998), o coeficiente de Poisson de um material borrachoso só possui significados físicos quando sua função está no intervalo 0 e 0,5 e é monotonicamente crescente ao longo do tempo.

Dessa forma, define-se o problema padrão de otimização no domínio do tempo, considerando o modelo constitutivo de Zener Fracionário de quatro parâmetros, como:

$$\text{Pt}_{\text{EG}} : \begin{cases} \text{minimizar} & (\text{erroEGt}_{\text{tot}})^2(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}, \\ \text{onde} & \mathbf{x} = (E_{\infty}, E_0, b_E, G_{\infty}, G_0, b_G, \beta, C_1^T, C_2^T), \\ \text{Restrições:} & \\ & \begin{cases} \mathbf{x}^{\text{inf}} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^{\text{sup}}, \\ \varepsilon_v < v(t, T) < 0,5 - \varepsilon_v, \\ (dv(t, T)/dt) \geq 0. \end{cases} \end{cases} \quad (124)$$

Consolidada a identificação pelo método integrado, o coeficiente de Poisson pode ser obtido de forma análoga à seção anterior. Além disso, por meio de uma simples substituição das propriedades identificadas, podem ser realizadas interconversões tempo-frequência.

5.2.3 Estrutura computacional de identificação para o domínio do tempo

Analogamente ao realizado para o domínio da frequência, a implementação computacional da metodologia proposta é realizada em ambiente MATLAB® conforme o pseudocódigo apresentado na FIGURA 17, onde o processo de caracterização é baseado numa técnica de otimização híbrida, AG seguido de PNL. Neste caso, nos processos de otimização por AG, é empregada a sub-rotina ga.m com uma população de 100 indivíduos, 1000 gerações e taxa de mutação de 0,09. Ademais, em PNL, é utilizada a sub-rotina fmincon.m com número máximo de iterações igual a 2000, número máximo de avaliação da função objetivo de 10000 e critério de parada (TolFun) de 1,0E-11.

Nos processos de otimização, os limites superiores e inferiores das propriedades relativas ao modelo WLF estão listados na TABELA 4. Esses limites estão baseados em experimentos numéricos, de modo que o ponto de ótimo não atinge os limites superiores e os inferiores.

O procedimento computacional aqui descrito é aplicado na identificação de propriedades mecânicas de MVEs empregando as metodologias tradicional e integrada. Análises de cada método, empregando a metodologia de otimização discutida nesta seção, são apresentadas no capítulo de resultados e discussões.

TABELA 4 - LIMITES DAS PROPRIEDADES MATERIAIS UTILIZADOS NO PROCESSO DE OTIMIZAÇÃO: DOMÍNIO DO TEMPO

Variável	Nomenclatura	Limites
Constante material WLF 1	C_1	$[0; 100]$
Constante material WLF 2 $[^{\circ}\text{C}]$	C_2	$[0; 200]$
Módulo de equilíbrio $[\text{Pa}]$	E_{∞}, G_{∞}	$[10^1; 10^7]$
Módulo instantâneo $[\text{Pa}]$	E_0, G_0	$[10^1; 10^{10}]$
Tempo de relaxação $[\text{s}^{\beta}]$	b_E, b_G	$[10^{-4}; 10^{-1}]$
Ordem de diferenciação	β_E, β_G, β	$[0,01; 0,99]$

FONTE: O autor (2018).

6 METODOLOGIA PROPOSTA PARA CONSTRUÇÃO E AVALIAÇÃO DE NOMOGRAMAS DE FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA

Este capítulo apresenta propostas para construção e avaliação de nomogramas de funções viscoelásticas, definidas nos domínios da frequência e do tempo. Na sequência, são descritas metodologias para a obtenção das propriedades mecânicas dos MVEs para uma dada temperatura e frequência (ou tempo), a partir do nomograma.

6.1 METODOLOGIA PROPOSTA PARA CONSTRUÇÃO DE NOMOGRAMAS

Para o domínio da frequência, as propriedades dinâmicas das funções viscoelásticas complexas, considerando várias temperaturas, podem ser exibidas num único gráfico denominado nomograma. Igualmente, no domínio do tempo, nomogramas podem ser construídos para funções viscoelásticas, como o módulo de relaxação em tração/cisalhamento e o coeficiente de Poisson.

A FIGURA 21 apresenta um método de construção de nomogramas nos domínios da frequência ou do tempo. A metodologia consiste em um *pseudo* algoritmo que descreve o ‘passo a passo’ de um procedimento computacional que pode ser empregado na construção de nomogramas de funções viscoelásticas no domínio do tempo (ou da frequência). Uma ilustração da implementação desse algoritmo é apresentada na FIGURA 22.

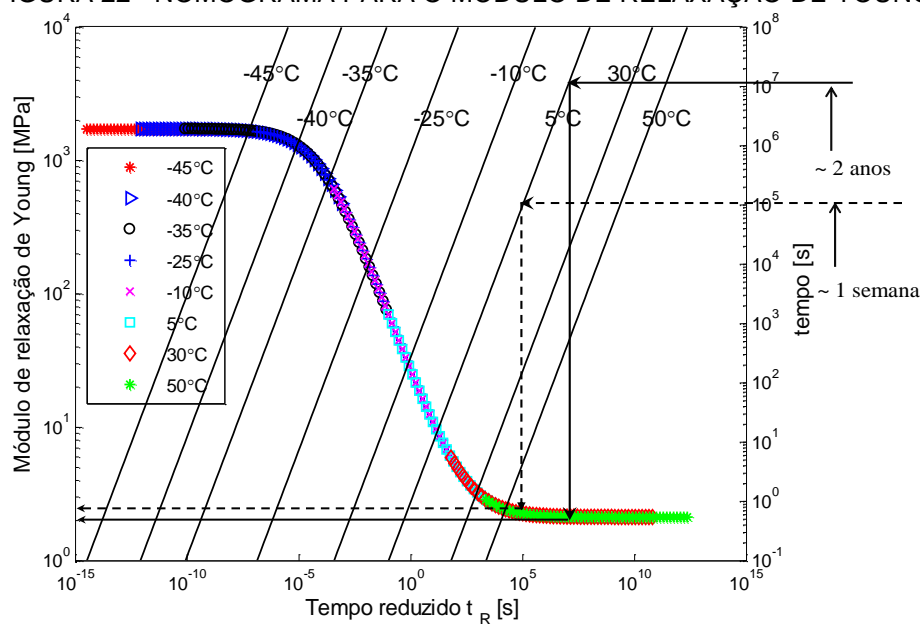
Consolidada a construção do nomograma, é possível obter facilmente as propriedades mecânicas do MVE em análise, para uma determinada temperatura e frequência (ou tempo) especificada (o). Esse é o tema da próxima seção.

FIGURA 21 - ALGORITMO DE CONSTRUÇÃO DE NOMOGRAMAS, DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA

<p>Passo 1: Obter as propriedades mecânicas do MVE considerando a influência da temperatura.</p> <p>Passo 2: Definir a função viscoelástica para construir o nomograma.</p> <p>Passo 3: Definir a temperatura de referência e o intervalo de frequência (tempo) reduzida (o).</p> <p>Passo 4: Obter as curvas da(s) função(ões) viscoelástica(s) na temperatura de referência considerando o intervalo definido para a frequência (tempo) reduzida(o). Neste caso, o eixo das abscissas corresponde à frequência (tempo) reduzida(o) e o eixo das ordenadas, à esquerda, corresponde aos valores das funções viscoelásticas.</p> <p>Passo 5: Construir um eixo de ordenadas, à direita, mantendo fixo o eixo das abscissas.</p> <p>Passo 6: Para diferentes temperaturas, construir, neste eixo, outro gráfico: frequência reduzida versus frequência. As curvas resultantes são retas.</p>

FONTE: O autor (2018).

FIGURA 22 - NOMOGRAMA PARA O MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE YOUNG



FONTE: O autor (2018).

6.2 AVALIAÇÃO E OBTENÇÃO DE PROPRIEDADES DINÂMICAS A PARTIR DE NOMOGRAMAS

A FIGURA 22 apresenta um nomograma construído na temperatura de referência de 5°C e considerando um intervalo de tempo para análise gráfica compreendido entre 1 segundo e um valor aproximado de 2 anos (eixo das ordenadas a direita). O método de obtenção da propriedade dinâmica, correspondente ao módulo de relaxação, é descrito no pseudo algoritmo apresentado na FIGURA 23. Analogamente, podem ser construídas e avaliadas outras funções viscoelásticas, definidas no domínio do tempo ou da frequência, para obtenção de propriedades dinâmicas.

FIGURA 23 - PSEUDO ALGORITMO PARA OBTENÇÃO DE PROPRIEDADES DINÂMICAS DE MVES DEFINIDOS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA

Passo 1: Determina-se o tempo e a temperatura, nos quais se deseja obter o módulo de relaxação (por exemplo 2 anos e 5°C).
 Passo 2: A partir do tempo desejado (exemplo: 2 anos), traça-se uma linha horizontal até a temperatura desejada (exemplo: 5°C), como ilustrado na FIGURA 22.
 Passo 3: A partir do ponto de interceptação obtido anteriormente, traça-se uma linha vertical até a curva da função viscoelástica (neste caso, de relaxação).
 Passo 4: Traça-se uma linha horizontal do ponto interceptado anteriormente da curva de relaxação até o eixo das ordenadas à esquerda.
 Passo 5: Obtém-se o valor do módulo de relaxação para o tempo requerido e temperatura considerada.

FONTE: O autor (2018).

7 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta os resultados e discussões obtidos nos processos de identificações dos MVEs para os domínios da frequência e do tempo, nesta sequência. O capítulo é encerrado com proposta de construção e avaliação de nomogramas referentes às funções viscoelásticas, nos domínios do tempo e da frequência.

7.1 IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Nesta seção, são discutidos os resultados das identificações empregando os métodos apresentados no capítulo 5, considerando os experimentos apresentados pelos laboratórios C e E de Jones (1992). Como os experimentos utilizados envolvem um mesmo material (EAR®-C1002), também são apresentadas algumas comparações envolvendo o coeficiente complexo de Poisson. Frise-se que todas as curvas máster foram construídas considerando uma temperatura de referência de 5°C.

7.1.1 Identificação dos parâmetros viscoelásticos – Laboratório C

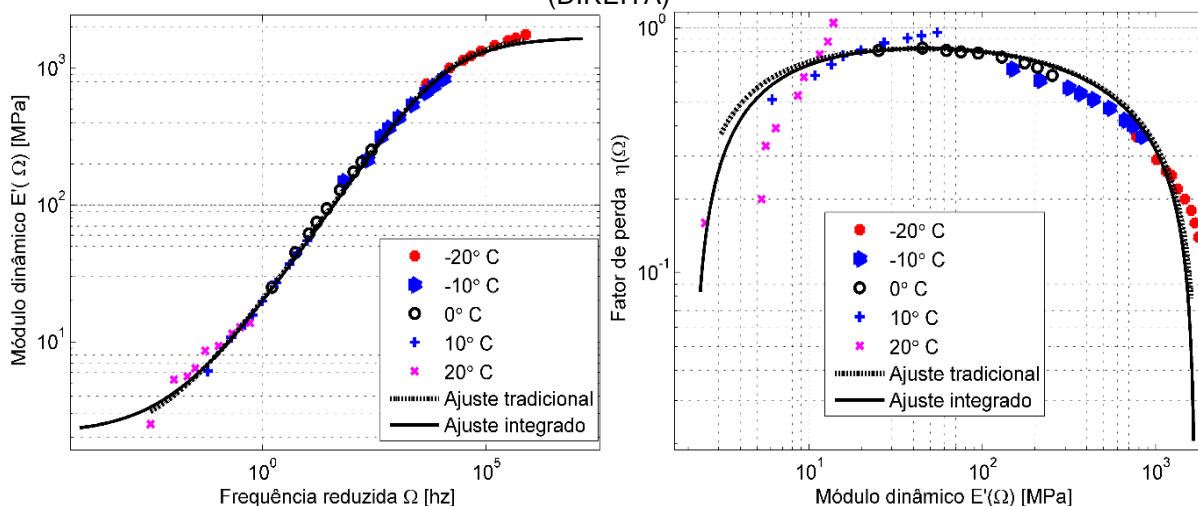
A partir dos dados experimentais fornecidos pelo laboratório C (Jones, 1992), identificam-se os módulos complexos de Young e de cisalhamento através das metodologias tradicional e integrada. Para cada situação, os parâmetros viscoelásticos obtidos são apresentados na TABELA 5. Além disso, os resultados dos ajustes podem ser comparados de forma gráfica na FIGURA 24 e na FIGURA 25. Com base nos parâmetros viscoelásticos identificados para os dois módulos complexos (TABELA 5), obtém-se o coeficiente complexo de Poisson empregando a equação (83). Como distintos resultados são encontrados, cada método é discutido com mais detalhes a seguir.

7.1.1.1 Metodologia tradicional

Considerando o método tradicional, nota-se que os modelos analíticos estão ajustados adequadamente aos dados experimentais (FIGURA 24 e FIGURA 25). No entanto, analisando o coeficiente complexo do coeficiente de Poisson (FIGURA 26), observa-se que o módulo dinâmico de Poisson não é monotonicamente decrescente e seu fator de perda apresenta valores negativos. Esses comportamentos violam um significado físico que o MVE em estudo é dissipador de energia. Além disso, em

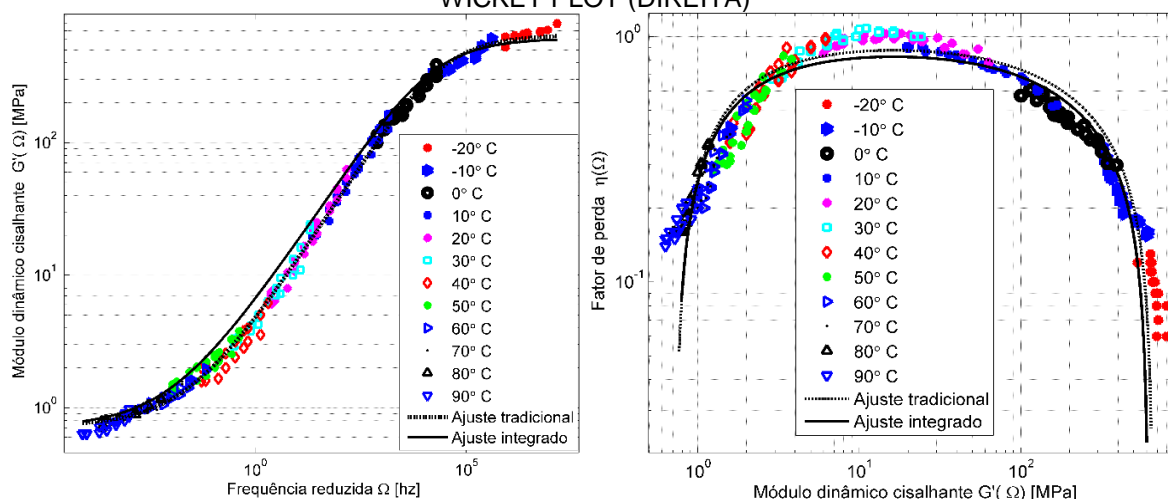
algumas frequências, o coeficiente de Poisson é maior do que 0,5. Isso implica que o volume do MVE decresceria em um teste de tração uniaxial (ou seja, um módulo volumétrico negativo). Esses resultados não possuem significados físicos de acordo com a teoria apresentada por Tschoegl (1989), Pritz (1998), Tschoegl, Knauss e Emri (2002) e Pritz (2007).

FIGURA 24 - LABORATORIO C. DADOS EXPERIMENTAIS E AJUSTADOS PARA O MÓDULO COMPLEXO DE YOUNG: MÓDULO DINÂMICO DE YOUNG (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)



FONTE: O autor (2018).

FIGURA 25 - LABORATORIO C. DADOS EXPERIMENTAIS E AJUSTADOS PARA O MÓDULO COMPLEXO DE CISALHAMENTO: MÓDULO DINÂMICO DE CISALHAMENTO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)



FONTE: O autor (2018).

Ao analisar os fatores de deslocamento obtidos para os módulos complexos de Young e de cisalhamento (FIGURA 27), nota-se que a influência da temperatura é similar para ambos os módulos complexos, na faixa de temperatura comum de -20°C

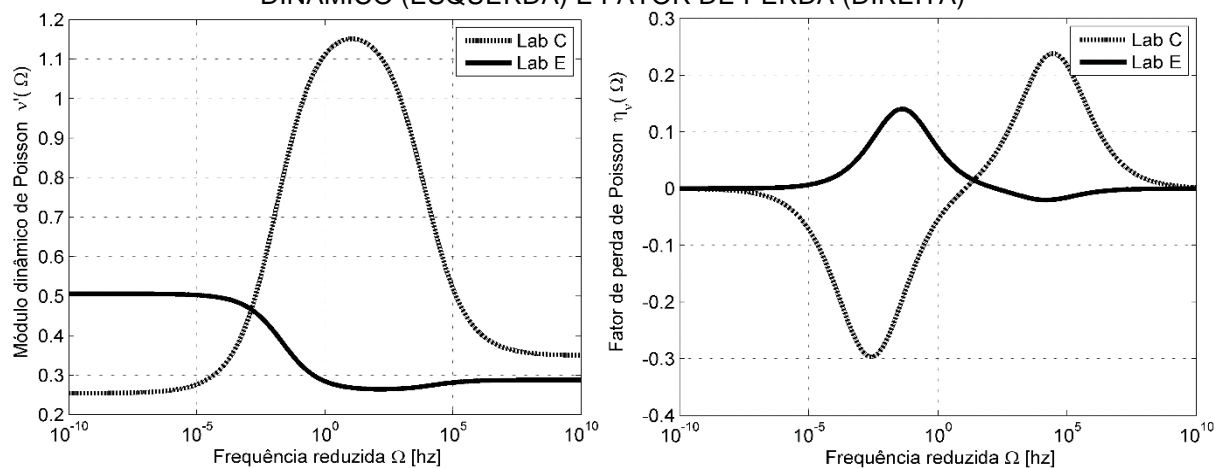
a 55°C. Outra semelhança é a ordem de diferenciação do complexo Young e módulo de cisalhamento, que tem uma diferença relativa menor que 5%.

TABELA 5 - LABORATÓRIO C. PROPRIEDADES IDENTIFICADAS DAS FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS COMPLEXAS (YOUNG E CISALHAMENTO): MÉTODOS TRADICIONAL E INTEGRADO

Parâmetros viscoelásticos identificados	Ajuste tradicional		Ajuste integrado
	Módulo complexo de Young	Módulo complexo de cisalhamento	Módulos complexos (Young e de cisalhamento)
\bar{E}_0	1,82E+06	-	2,13E+06
\bar{E}_∞	1,77E+09	-	1,69E+09
b_E	1,41E-02	-	1,42E-02
\bar{G}_0	-	7,25E+05	7,18E+05
\bar{G}_∞	-	6,55E+08	6,15E+08
b_G	-	8,63E-03	1,31E-02
β	4,66E-01	4,88E-01	4,69E-01
C_1	24,74	15,83	13,78
C_2	172,95	139,84	102,63
Erro PNL	1,38E-02	1,81E-02	1,99E-02

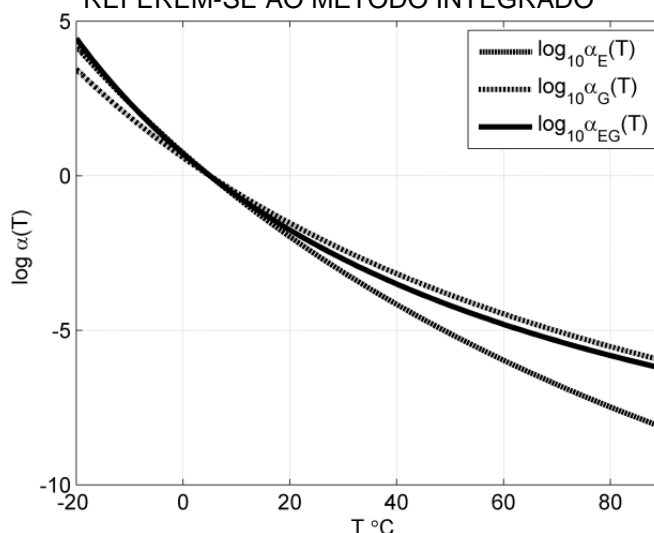
FONTE: O autor (2018).

FIGURA 26 - MÉTODO TRADICIONAL. COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON: MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E FATOR DE PERDA (DIREITA)



FONTE: O autor (2018).

FIGURA 27 - LABORATÓRIO C. FATOR DE DESLOCAMENTO TEMPO-TEMPERATURA. AS LINHAS PONTILHADAS REFEREM-SE AO MÉTODO TRADICIONAL E AS LINHAS CONTÍNUAS REFEREM-SE AO MÉTODO INTEGRADO



FONTE: O autor (2018).

A fim de caracterizar um conjunto consistente de funções viscoelásticas que atendam aos requisitos físicos básicos, um processo de identificação mais robusto é implementado utilizando a metodologia integrada proposta neste trabalho, em que algumas restrições são inseridas em relação à função viscoelástica coeficiente complexo de Poisson. Além disso, a premissa assumida aqui é que os módulos complexos de Young e de cisalhamento têm a mesma ordem de diferenciação e que a temperatura influencia ambos os módulos complexos igualmente.

7.1.1.2 Metodologia integrada

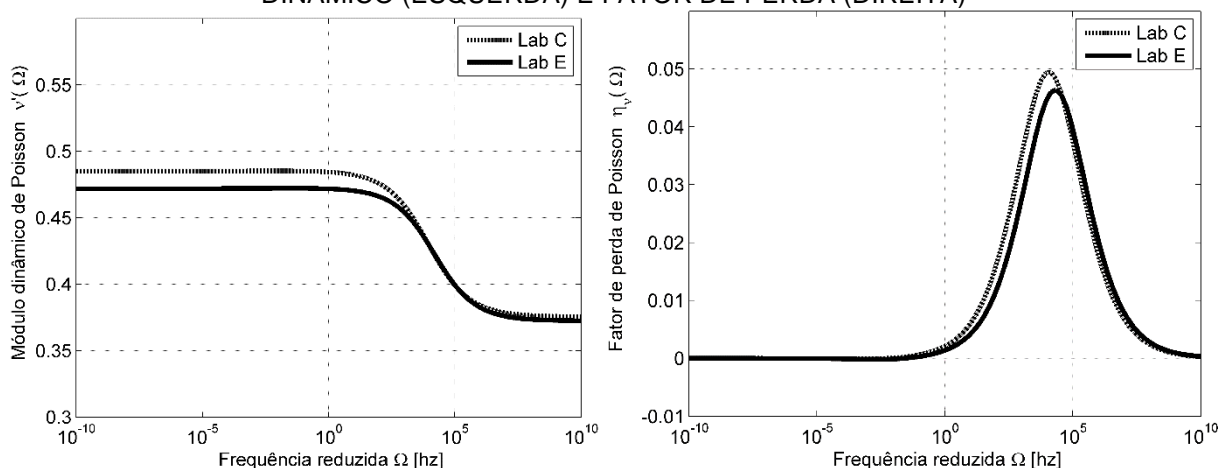
Utilizando a metodologia integrada de identificação, proposta neste trabalho, também são observados ajustes adequados para os módulos complexos (Young e de cisalhamento), os quais estão bem próximos àqueles obtidos empregando a metodologia tradicional (FIGURA 24 e FIGURA 25). Em relação ao coeficiente complexo de Poisson (FIGURA 28), observa-se que seu módulo dinâmico é uma curva monotônica decrescente. Em relação ao fator de perda do coeficiente de Poisson, obtém-se uma curva com um ponto de máximo.

Utilizando as propriedades obtidas dos módulos complexos de Young e de cisalhamento, obtém-se o módulo complexo volumétrico ponto a ponto por meio da equação (82). Essa função pode ser visualizada na FIGURA 29. Observa-se que, neste caso, o módulo complexo volumétrico é uma curva monotonicamente crescente na faixa de frequências consideradas. Esta curva está localizada acima dos módulos

complexos de Young e de cisalhamento. Portanto, os resultados obtidos estão de acordo a teoria apresentada por Tschoegl (1989), Pritz (1998) e Tschoegl, Knauss e Emri (2002).

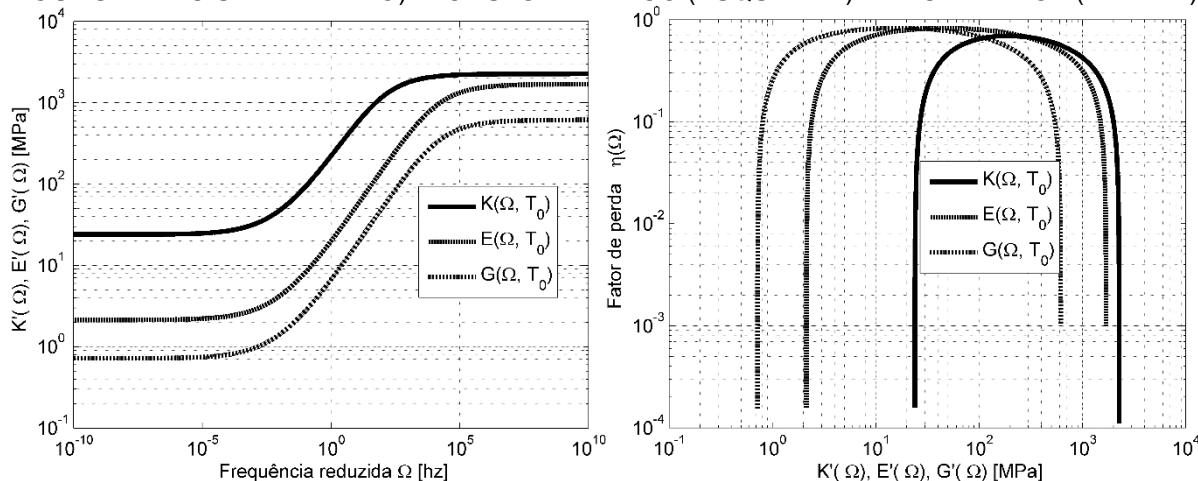
A FIGURA 27 apresenta o gráfico do fator de deslocamento tempo-temperatura em função da temperatura. Verifica-se que o fator de deslocamento obtido pelo método integrado praticamente se sobrepõe à curva obtida pelo método tradicional para o módulo complexo de cisalhamento. Isso é explicado, pois os experimentos para o módulo complexo de Young são realizados num intervalo menor de temperatura (-20°C a 20°C) e, com isso, a tendência é a curva do fator de deslocamento, encontrada pela metodologia integrada, seguir a influência de temperatura para o módulo complexo em cisalhamento, pois abrange um intervalo mais amplo de temperaturas.

FIGURA 28 - MÉTODO INTEGRADO. COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON: MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E FATOR DE PERDA (DIREITA)



FONTE: O autor (2018).

FIGURA 29 - LABORATÓRIO C. FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS COMPLEXAS (VOLUMÉTRICO, YOUNG E DE CISALHAMENTO): MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)



FONTE: O autor (2018).

7.1.2 Identificação dos parâmetros viscoelásticos – Laboratório E

Utilizando os dados experimentais apresentados pelo laboratório E, similarmente à seção anterior, a identificação do material viscoelástico EAR®-C1002 é realizada através das metodologias tradicional e integrada. Os resultados dos ajustes podem ser visualizados na FIGURA 30 e na FIGURA 31. Os valores das propriedades obtidos no processo de otimização são apresentados na TABELA 6.

Através dos parâmetros viscoelásticos identificados, obtém-se o coeficiente complexo de Poisson (FIGURA 26 e FIGURA 28). Visto que diferentes funções viscoelásticas são obtidas, a seguir, são apontadas as principais características de cada metodologia.

TABELA 6 - LABORATÓRIO E: PROPRIEDADES IDENTIFICADAS DOS MÓDULOS COMPLEXOS (YOUNG E DE CISALHAMENTO): MÉTODOS TRADICIONAL E INTEGRADO

Parâmetros viscoelásticos identificados	Ajuste tradicional		Ajuste integrado
	Módulo complexo de Young	Módulo complexo de cisalhamento	Parâmetros viscoelásticos identificados
\bar{E}_0	2,17E+06	-	2,10E+06
\bar{E}_∞	1,83E+09	-	2,02E+09
b_E	7,13E-03	-	1,03E-02
\bar{G}_0	-	7,20E+05	7,13E+05
\bar{G}_∞	-	7,12E+08	7,35E+08
b_G	-	7,29E-03	9,60E-03
β	5,43E-01	4,84E-01	4,73E-01
C_1^T	16,17	19,31	15,92
C_2^T	133,80	157,97	111,08
Erro PNL	2,03E-02	2,20E-02	2,77E-02

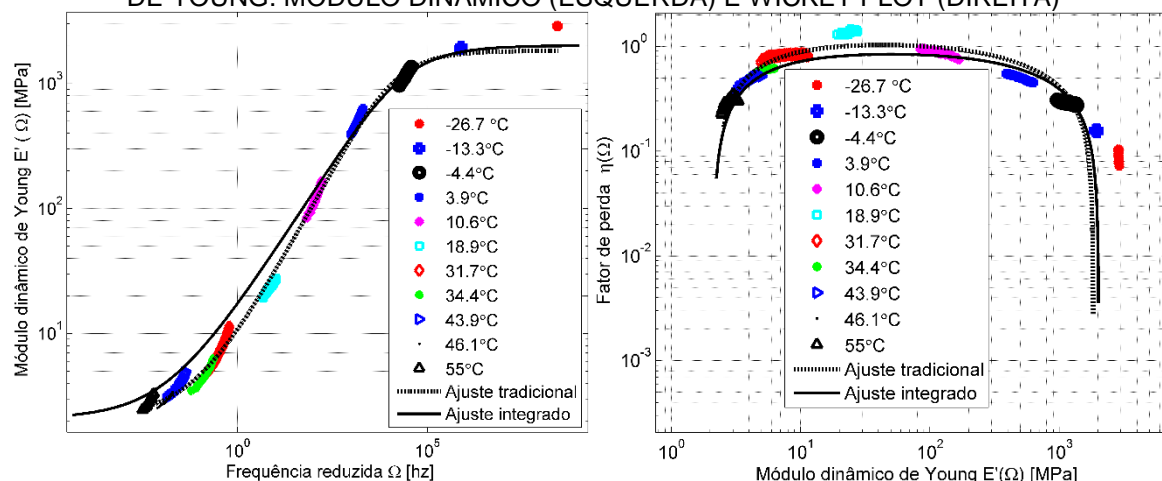
FONTE: O autor (2018).

7.1.2.1 Metodologia tradicional

Considerando o método tradicional, observa-se que os modelos analíticos estão ajustados adequadamente aos dados experimentais (FIGURA 30 e FIGURA 31). No entanto, analisando o coeficiente complexo de Poisson (FIGURA 26), observam-se comportamentos inadequados para o módulo dinâmico e o fator de perda associados. A primeira é que o módulo dinâmico de Poisson não é monotonicamente decrescente, o que viola um significado físico que o MVE sob análise é um material que dissipa energia. Além disso, para pequenos valores de frequência, o coeficiente dinâmico de Poisson é de 0,5, o que implica que o MVE é

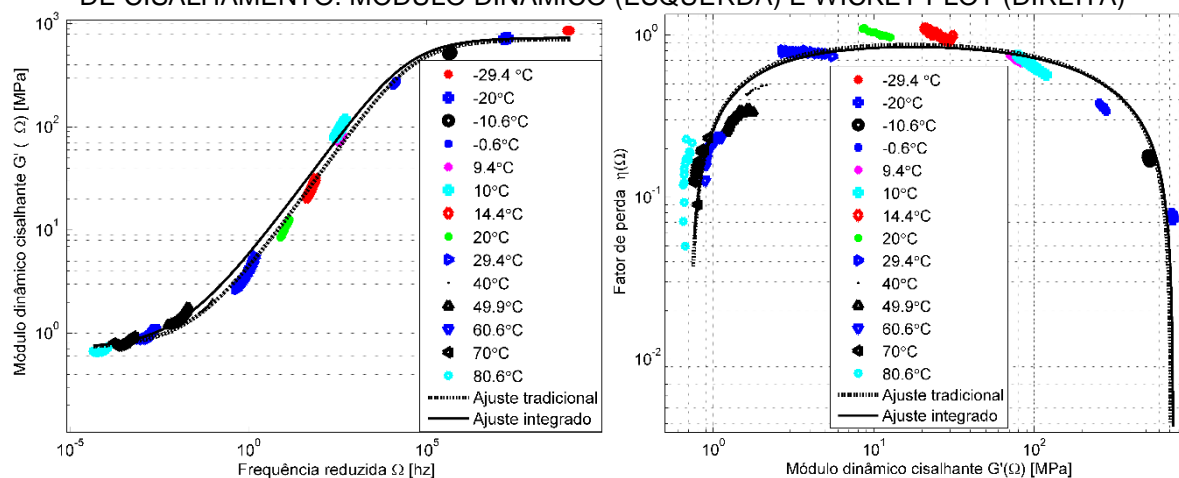
perfeitamente incompressível, o que é improvável. Logo, segundo Tschoegl (1989), Pritz (1998), Tschoegl, Knauss e Emri (2002) e Pritz (2007), este comportamento não possui significado físico.

FIGURA 30 - LABORATÓRIO E. DADOS EXPERIMENTAIS E AJUSTADOS: MÓDULO COMPLEXO DE YOUNG. MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)



FONTE: O autor (2018)

FIGURA 31 - LABORATÓRIO E. DADOS EXPERIMENTAIS E AJUSTADOS: MÓDULO COMPLEXO DE CISALHAMENTO. MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)

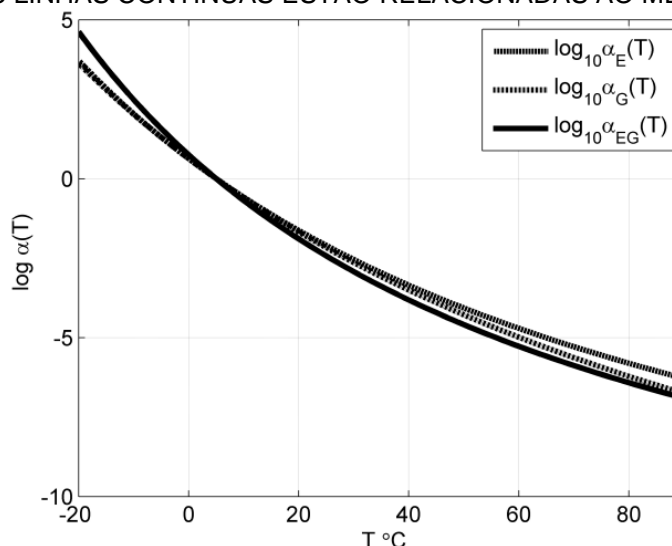


FONTE: O autor (2018).

Ao analisar os fatores de deslocamento obtidos para os módulos complexos de Young e de cisalhamento (FIGURA 32), nota-se que a influência da temperatura é similar. Isso é notado em virtude da proximidade dos gráficos no intervalo -20°C a 55°C . Deve ser enfatizado que dados experimentais para módulo complexo de Young estão apenas nesse intervalo. Dessa forma, a fim de obter resultados fisicamente coerentes, para o coeficiente de Poisson, assumem-se as premissas de que a temperatura influencia igualmente nos comportamentos mecânicos dos módulos complexos de Young e de cisalhamento, e que tais módulos possuem mesma a ordem de diferenciação (como realizado por Chen et al. 2017). Além disso, inserem-se no problema padrão de otimização restrições, equação (114), que impedem o

comportamento físico inadequado da função coeficiente complexo de Poisson. A seguir, são discutidos os resultados da caracterização obtidos por meio do método integrado, o qual envolve simultaneamente dados experimentais dos módulos complexos de Young e de cisalhamento.

FIGURA 32 - LABORATÓRIO E. FATOR DE DESLOCAMENTO COMO FUNÇÃO DA TEMPERATURA. AS LINHAS PONTILHADAS ESTÃO RELACIONADAS AO MÉTODO TRADICIONAL E AS LINHAS CONTÍNUAS ESTÃO RELACIONADAS AO MÉTODO INTEGRADO.

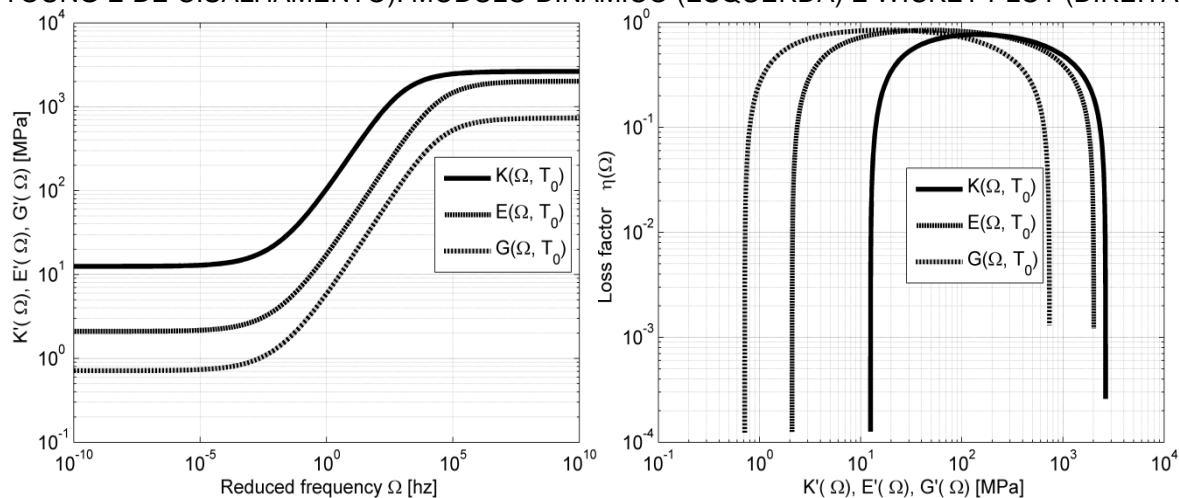


FONTE: O autor (2018).

7.1.2.2 Identificação integrada

Utilizando a metodologia integrada proposta, identificam-se os módulos complexos (FIGURA 30 e FIGURA 31) e, relacionando-os obtém-se o módulo dinâmico do coeficiente complexo de Poisson (FIGURA 28). Note-se que, para esta metodologia, esta função se mostra coerente, pois o seu módulo dinâmico é uma curva monotônica decrescente, ao longo da frequência, e o seu fator de perda apresenta um ponto de máximo. Além disso, partindo dos dois módulos complexos identificados, $E^*(\Omega)$ e $G^*(\Omega)$, obtém-se o módulo complexo volumétrico, por meio da equação (67), no domínio da frequência. Esses três módulos complexos podem ser visualizados graficamente na FIGURA 33. Observa-se que o módulo volumétrico complexo é uma função monotônica crescente, ao longo da frequência, e que sua curva está acima dos outros dois módulos complexos (Young e de cisalhamento). Tais resultados estão em concordância com a teoria apresentada por Pritz (1998) e Tschoegl, Knauss e Emri (2002).

FIGURA 33 - LABORATÓRIO E. FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS COMPLEXAS (VOLUMÉTRICO, YOUNG E DE CISALHAMENTO): MÓDULO DINÂMICO (ESQUERDA) E WICKET PLOT (DIREITA)



FONTE: O autor (2018).

Adicionalmente, a FIGURA 32 apresenta o gráfico do fator de deslocamento em função da temperatura. Nota-se que, apesar dos resultados numéricos apresentarem pequenas diferenças para as constantes do modelo WLF (TABELA 6), a função do fator de deslocamento obtida pela metodologia integrada (FIGURA 32) segue um comportamento similar àqueles apresentados pelo método tradicional. Esses fatos bem como os comportamentos adequados obtidos para as funções viscoelásticas viabilizam a aplicação da metodologia integrada de modo confiável.

7.2 IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

Nesta seção, são discutidos os resultados referentes a implementação computacional das metodologias de identificação tradicional e integrada, para o domínio do tempo, apresentadas no capítulo 5.

7.2.1 Metodologia tradicional

Inicialmente empregando a metodologia tradicional, identificam-se os módulos de relaxação de Young e de cisalhamento. Os resultados numéricos referentes às identificações para os três conjuntos de experimentos são apresentados na TABELA 7. Em cada coluna “dispersão”, são apresentadas as propriedades viscoelásticas identificadas. Além disso, para cada valor de dispersão introduzido artificialmente, uma comparação percentual, entre os parâmetros identificados e as propriedades materiais apresentadas em Sousa et al. (2018), é mostrada na coluna “diferença relativa”.

TABELA 7 - PROPRIEDADES OBTIDAS PARA DIFERENTES DISPERSÕES: MÉTODO TRADICIONAL

Propriedades de Sousa et al. (2018)		Dispersão de 0%		Dispersão de +/-10%		Dispersão de +/-20%	
		Propriedades identificadas	Diferença relativa (%)	Propriedades identificadas	Diferença relativa (%)	Propriedades identificadas	Diferença relativa (%)
E_{∞}	2,13E+06	2,13E+06	9,84E-06	2,14E+06	4,01E-01	2,06E+06	3,39E+00
E_0	1,69E+09	1,69E+09	4,83E-06	1,69E+09	3,83E-01	1,63E+09	3,73E+00
b_E	1,42E-02	1,42E-02	2,93E-05	1,41E-02	9,41E-01	1,48E-02	4,17E+00
G_{∞}	7,18E+05	7,18E+05	2,26E-05	7,19E+05	1,59E-01	6,83E+05	4,91E+00
G_0	6,15E+08	6,15E+08	2,91E-05	6,07E+08	1,39E+00	5,78E+08	6,05E+00
b_G	1,31E-02	1,31E-02	9,80E-06	1,31E-02	6,08E-01	1,28E-02	2,80E+00
β	4,69E-01	4,69E-01	2,29E-05	4,71E-01	4,72E-01	4,71E-01	5,80E-01
C_1	1,38E+01	1,38E+01	1,49E-04	1,39E+01	1,05E+00	1,37E+01	5,03E-01
C_2	1,03E+02	1,03E+02	1,17E-04	1,03E+02	7,75E-01	1,02E+02	5,03E-01

FONTE: O autor (2018).

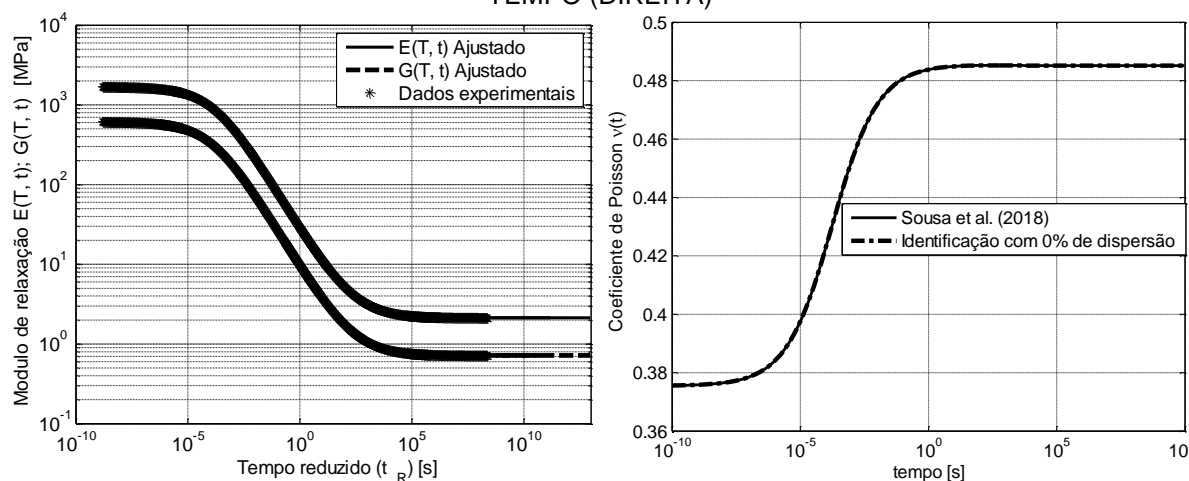
Por outro lado analisando os resultados gráficos, observa-se que, empregando a metodologia tradicional de identificação para o domínio do tempo, os modelos analíticos estão ajustados adequadamente aos dados experimentais, conforme ilustram a FIGURA 34, FIGURA 35 e FIGURA 36.

Ademais, analisando o coeficiente de Poisson obtido para dispersões de 0%, notam-se ajustes perfeitos para os resultados aqui obtidos e o modelo de Sousa et al. (2018), tanto para o domínio do tempo como para o da frequência como ilustram a FIGURA 34 e a FIGURA 37. Entretanto, para dispersões de +/-10%, notam-se divergências acentuadas para o coeficiente de Poisson nos domínios do tempo e da frequência (FIGURA 35 e FIGURA 38). Nesses casos, é observado que os coeficientes de Poisson possuem comportamentos não monotônicos com pontos de máximo para os domínios do tempo ou da frequência. Finalmente, ao analisar dispersões de +/-20%, nota-se que a curva viscoelástica de Poisson, nos domínios do tempo e da frequência, ultrapassa o valor de 0,5, além de não ser monotônica crescente para o domínio do tempo, ou monotônica decrescente para o domínio da frequência, como ilustram a FIGURA 36 e a FIGURA 39. Nota-se também que seu fator de perda correspondente possui valores negativos. Esses comportamentos violam um significado físico que o MVE em estudo é dissipador de energia de acordo com a teoria apresentada por Tschoegl (1989), Pritz (1998), Tschoegl, Knauss e Emri (2002) e Pritz (2007).

Dessa forma, a fim de identificar funções viscoelásticas que atendam aos requisitos físicos básicos, um processo de identificação mais robusto é implementado

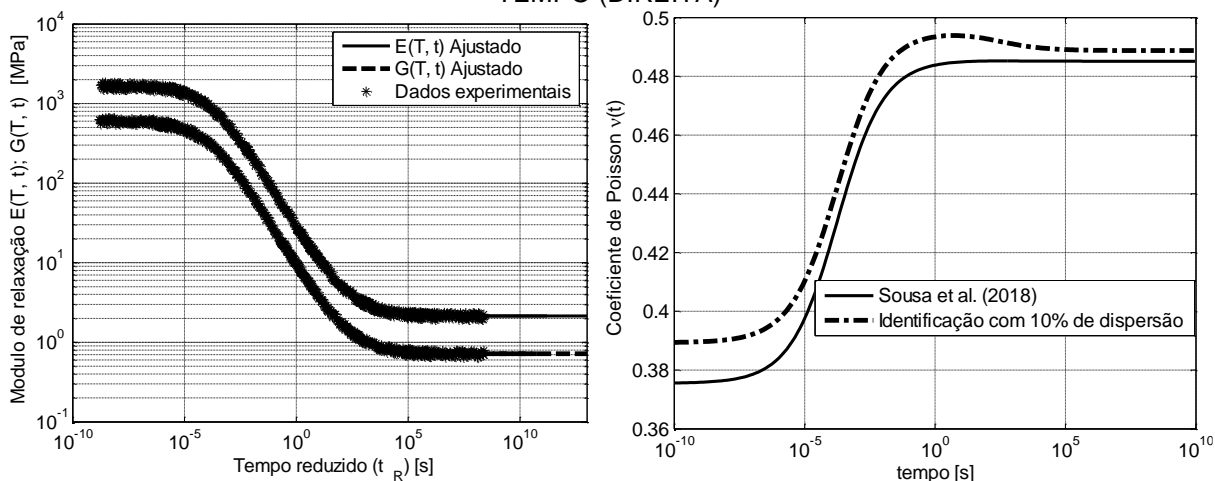
com base em técnicas de otimização, equação (124), em que algumas restrições são inseridas em relação à função viscoelástica coeficiente de Poisson, definido no domínio do tempo. Além disso, a premissa assumida aqui é que os módulos de relaxação (Young e de cisalhamento) têm a mesma ordem de diferenciação e que a temperatura influencia ambos os módulos igualmente.

FIGURA 34 - DADOS EXPERIMENTAIS (0% DE DISPERSÃO) E MODELOS AJUSTADOS PARA MÓDULO DE RELAXAÇÃO (ESQUERDA) E COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO (DIREITA)



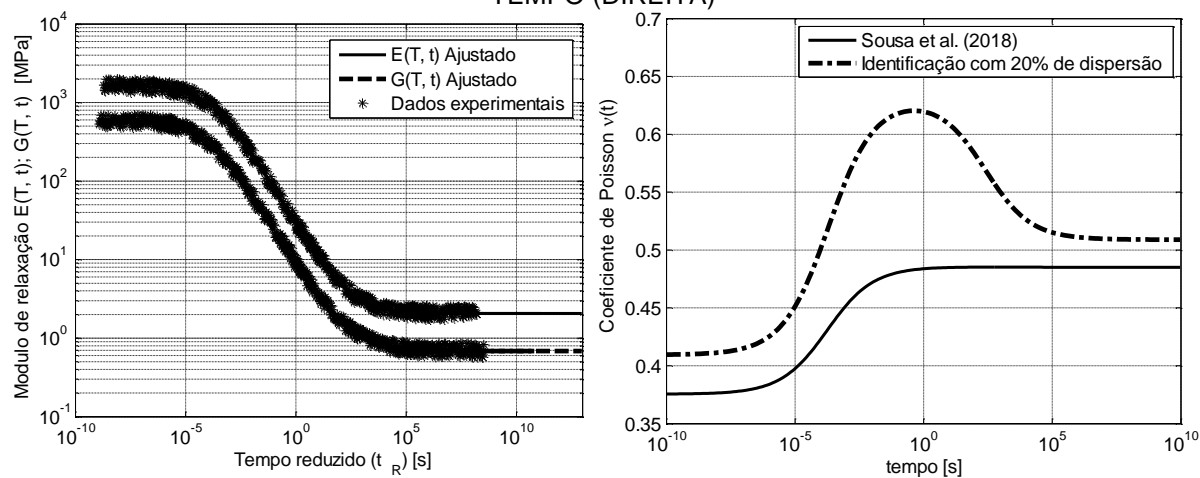
FONTE: O autor (2018).

FIGURA 35 - DADOS EXPERIMENTAIS (10% DE DISPERSÃO) E MODELOS AJUSTADOS PARA MÓDULO DE RELAXAÇÃO (ESQUERDA) E COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO (DIREITA)



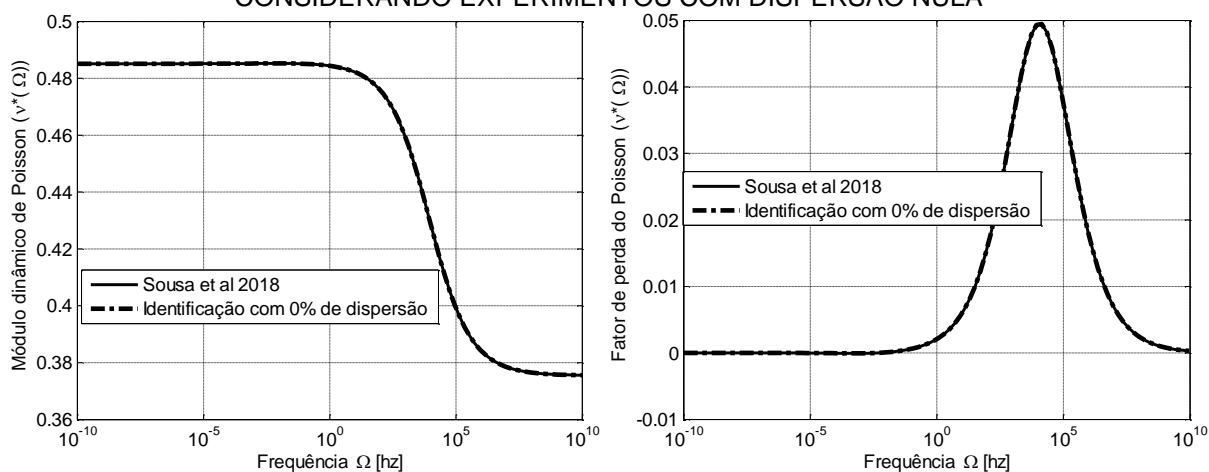
FONTE: O autor (2018).

FIGURA 36 - DADOS EXPERIMENTAIS (20% DE DISPERSÃO) E MODELOS AJUSTADOS PARA MÓDULO DE RELAXAÇÃO (ESQUERDA) E COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO (DIREITA)



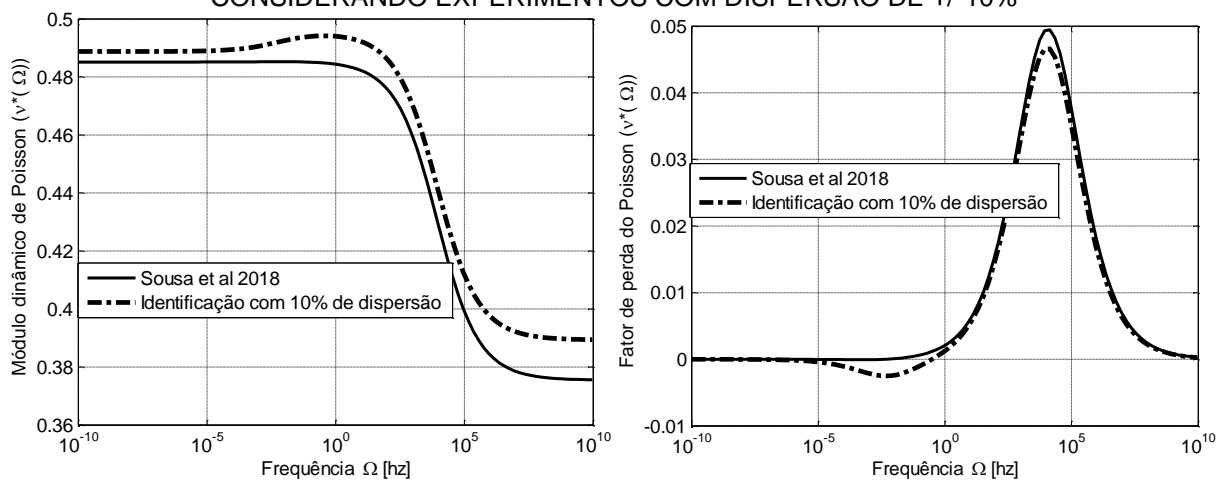
FONTE: O autor (2018).

FIGURA 37 - COMPARAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON CONSIDERANDO EXPERIMENTOS COM DISPERSÃO NULA



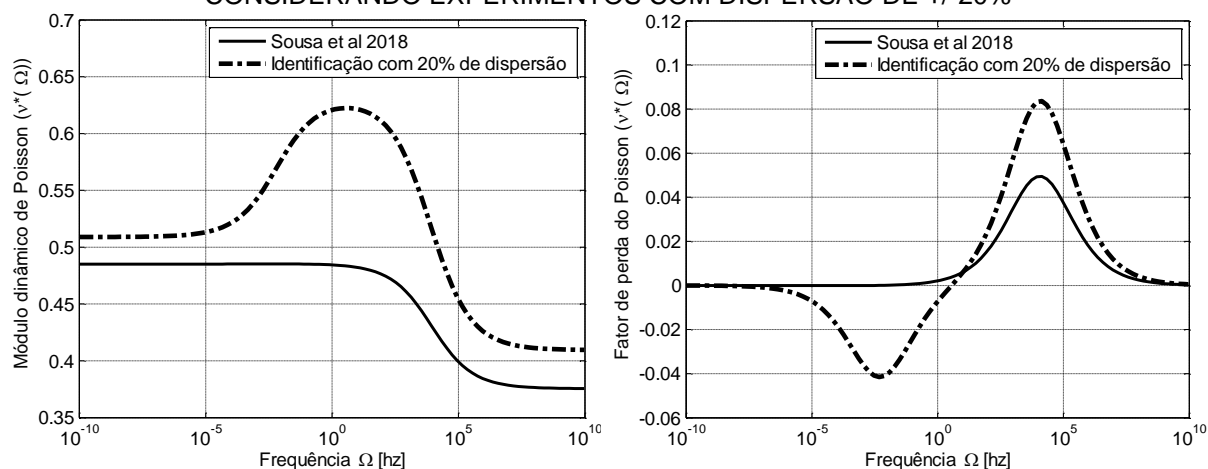
FONTE: O autor (2018).

FIGURA 38 - COMPARAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON CONSIDERANDO EXPERIMENTOS COM DISPERSÃO DE +/-10%



FONTE: O autor (2018).

FIGURA 39 - COMPARAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON CONSIDERANDO EXPERIMENTOS COM DISPERSÃO DE +/-20%



FONTE: O autor (2018).

7.2.2 Metodologia integrada

Nesta seção são apresentados os resultados das identificações empregando a metodologia integrada proposta no capítulo 5. Resultados numéricos das identificações para os conjuntos de experimentos, no domínio do tempo são apresentadas na TABELA 8. Analisando a coluna de diferença relativa dessa tabela, observa-se que, para os experimentos com dispersão nula, as diferenças relativas entre cada parâmetro aqui identificado e aqueles apresentados por Sousa et al. (2018) são praticamente nulos. Ademais, para os experimentos com dispersões de +/-10% e +/-20%, as diferenças relativas aumentam, entretanto essas diferenças ainda constituam pequenas, não atingindo valores significativamente altos.

Visualizações gráficas dos ajustes teóricos aos experimentais para os módulos de relaxação são apresentadas da FIGURA 40 à FIGURA 42. Analisando os resultados gráficos das identificações, notam-se ajustes praticamente perfeitos para os módulos de relaxação em tração e cisalhamento.

Aplicando a equação (97), são construídas funções viscoelásticas para o coeficiente de Poisson, no domínio do tempo (FIGURA 40 à FIGURA 42). Essas curvas relativas ao coeficiente de Poisson, em todas as situações, se mostram monotonicamente crescente, o que representa um comportamento físico adequado. Nota-se que estas curvas (coeficiente de Poisson) apresentam pequenas divergências entre si, o que é esperado, pois existem três conjuntos de experimentos distintos e, como supracitado, os parâmetros identificados são ligeiramente distintos.

TABELA 8 - PROPRIEDADES IDENTIFICADAS PARA DIFERENTES DISPERSÕES: MÉTODO INTEGRADO

Propriedades de Sousa et al. (2018)		Dispersão de 0%		Dispersão de +/-10%		Dispersão de +/-20%	
		Propriedades identificadas	Diferença relativa (%)	Propriedades identificadas	Diferença relativa (%)	Propriedades identificadas	Diferença relativa (%)
E_{∞}	2,13E+06	2,13E+06	1,68E-05	2,13E+06	1,61E-01	2,02E+06	5,41E+00
E_0	1,69E+09	1,69E+09	1,74E-05	1,72E+09	1,86E+00	1,61E+09	5,12E+00
b_E	1,42E-02	1,42E-02	4,40E-05	1,28E-02	1,10E+01	1,27E-02	1,04E+01
G_{∞}	7,18E+05	7,18E+05	1,48E-05	7,12E+05	8,30E-01	6,74E+05	6,04E+00
G_0	6,15E+08	6,15E+08	1,35E-05	6,20E+08	8,50E-01	5,65E+08	8,07E+00
b_G	1,31E-02	1,31E-02	3,69E-05	1,19E-02	1,06E+01	1,21E-02	8,14E+00
β	4,69E-01	4,69E-01	1,05E-06	4,52E-01	3,61E+00	4,27E-01	8,86E+00
C_1	1,38E+01	1,38E+01	1,15E-04	1,43E+01	3,85E+00	1,22E+01	1,16E+01
C_2	1,03E+02	1,03E+02	8,20E-05	1,03E+02	4,69E-01	9,12E+01	1,12E+01
Erro PNL	-	2,94E-14	-	1,15E-02		6,13E-02	-

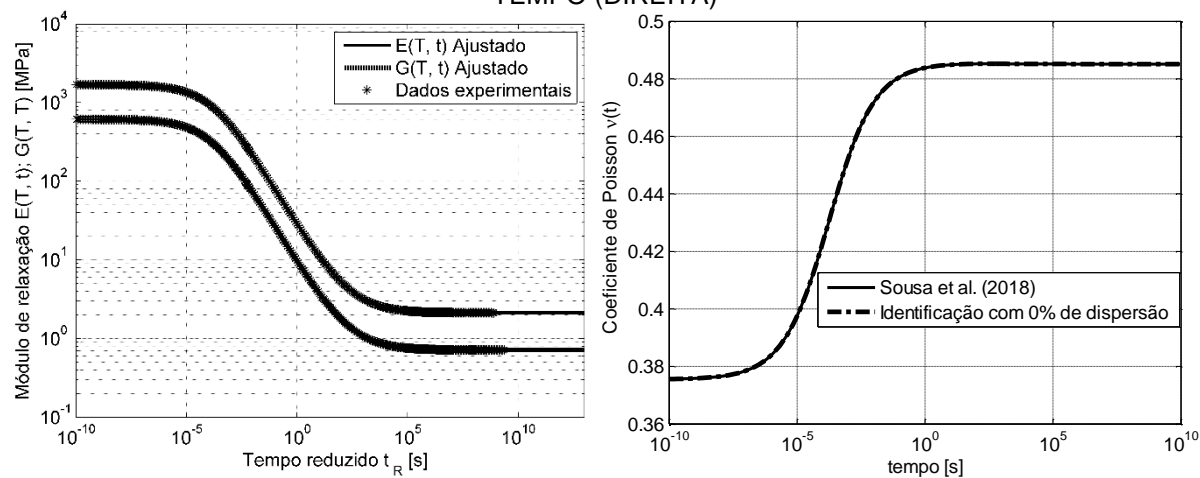
FONTE: O autor (2018).

Considerando o domínio da frequência, por interconversão, obtém-se o coeficiente complexo de Poisson, apresentados da FIGURA 43 à FIGURA 45, onde as linhas pontilhadas estão relacionadas com a identificação no domínio do tempo e as linhas contínuas estão relacionadas aos parâmetros viscoelásticos de Sousa et al. (2018). Nota-se que o módulo dinâmico do coeficiente de Poisson se mostra decrescente e seu correspondente fator de perda possui um ponto de máximo, ao longo da frequência. Tais resultados estão em concordância com a teoria clássica da viscoelasticidade linear (NASHIF et al. 1985; TSCHOEGL, 1989; PRITZ, 1998; TSCHOEGL, 2002).

Observando a situação para quando a dispersão é nula, as curvas identificadas se sobrepõem exatamente à curva de Sousa et al. (2018), como ilustra a FIGURA 43. Outrossim, considerando os casos para quando as dispersões são de 10% e 20%, notam-se que existem divergências, o que é esperado. No entanto, as curvas identificadas apresentam comportamentos adequados como ilustram a FIGURA 44 e a FIGURA 45.

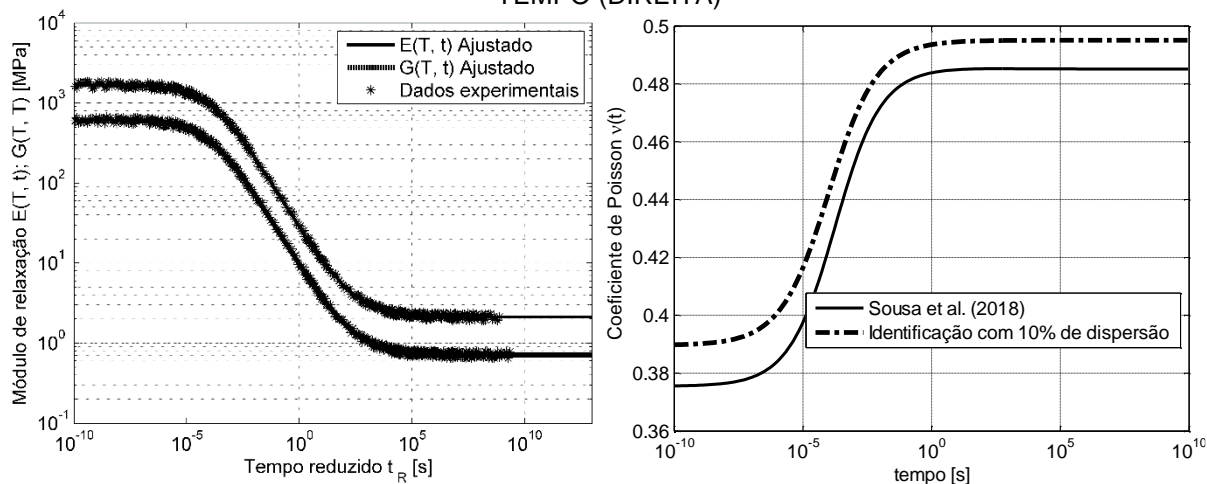
Dessa forma, ainda que os dados experimentais sejam dispersos, infere-se que o método de identificação de MVEs, aqui proposto, obtém de forma aproximada o comportamento mecânico das funções viscoelásticas do coeficiente Poisson, para os domínios do tempo e da frequência.

FIGURA 40 - DADOS EXPERIMENTAIS (0% DE DISPERSÃO) E MODELOS AJUSTADOS PARA MÓDULO DE RELAXAÇÃO (ESQUERDA) E COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO (DIREITA)



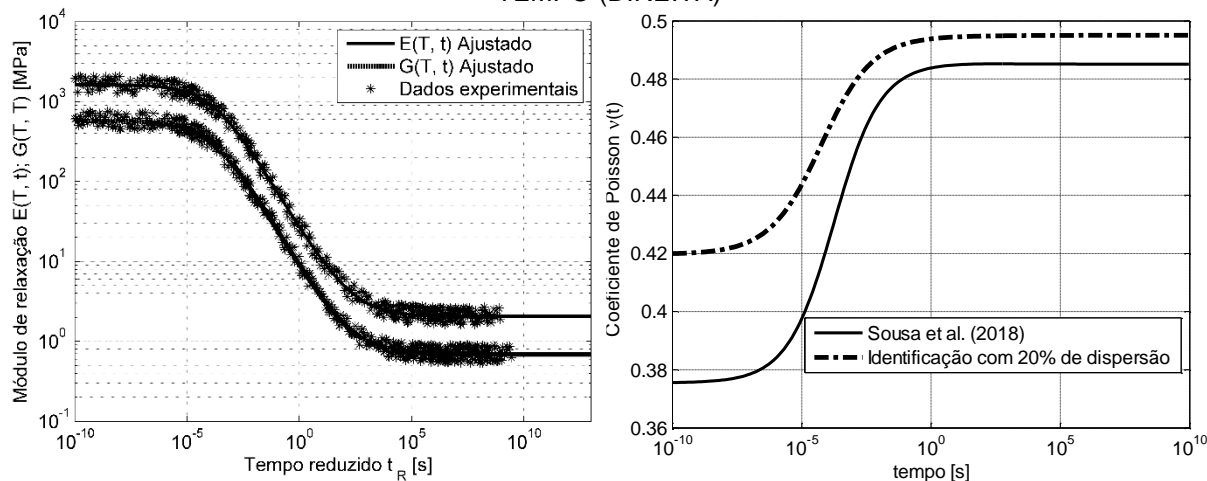
FONTE: O autor (2018).

FIGURA 41 - DADOS EXPERIMENTAIS (10% DE DISPERSÃO) E MODELOS AJUSTADOS PARA MÓDULO DE RELAXAÇÃO (ESQUERDA) E COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO (DIREITA)



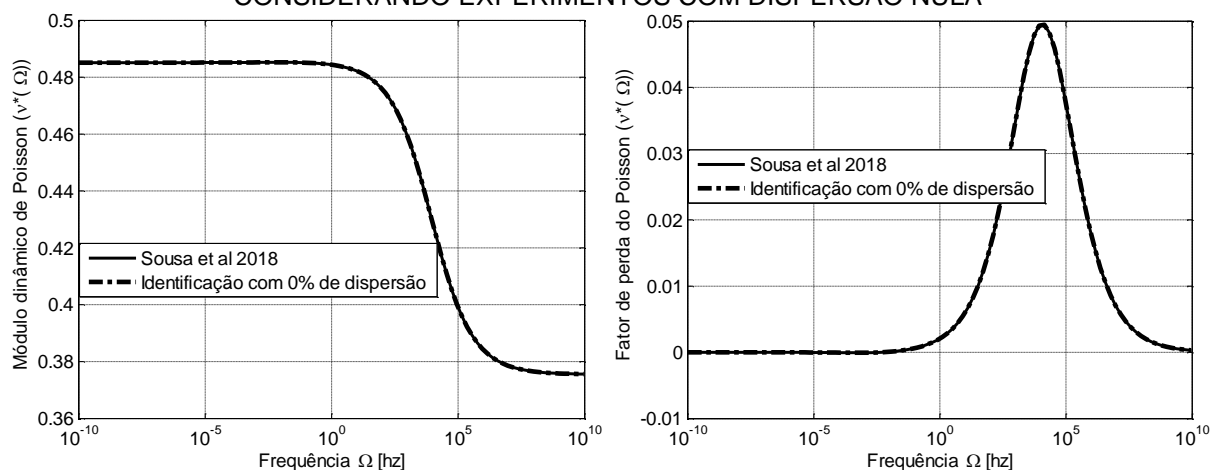
FONTE: O autor (2018).

FIGURA 42 - DADOS EXPERIMENTAIS (20% DE DISPERSÃO) E MODELOS AJUSTADOS PARA MÓDULO DE RELAXAÇÃO (ESQUERDA) E COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO (DIREITA)



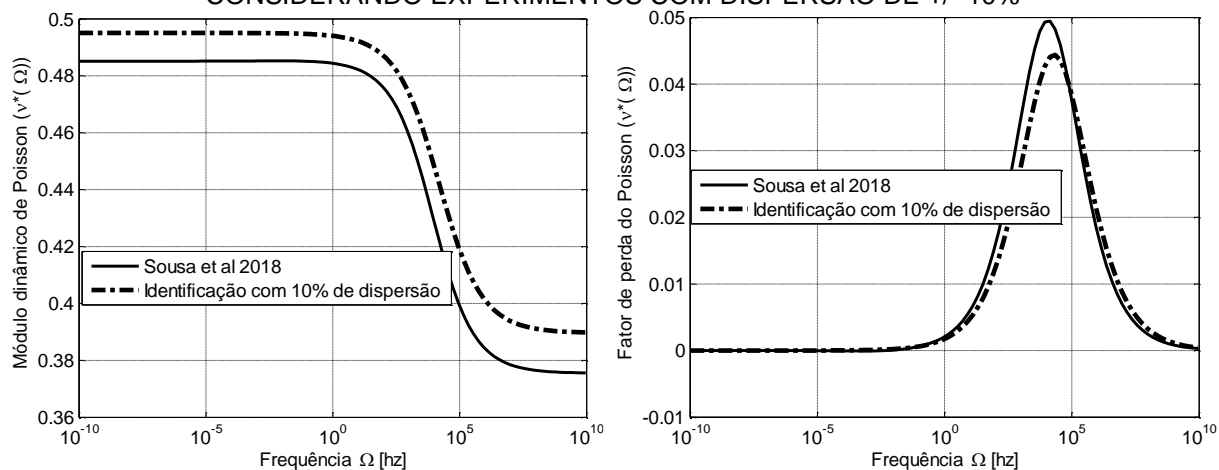
FONTE: O autor (2018).

FIGURA 43 - COMPARAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON CONSIDERANDO EXPERIMENTOS COM DISPERSÃO NULA



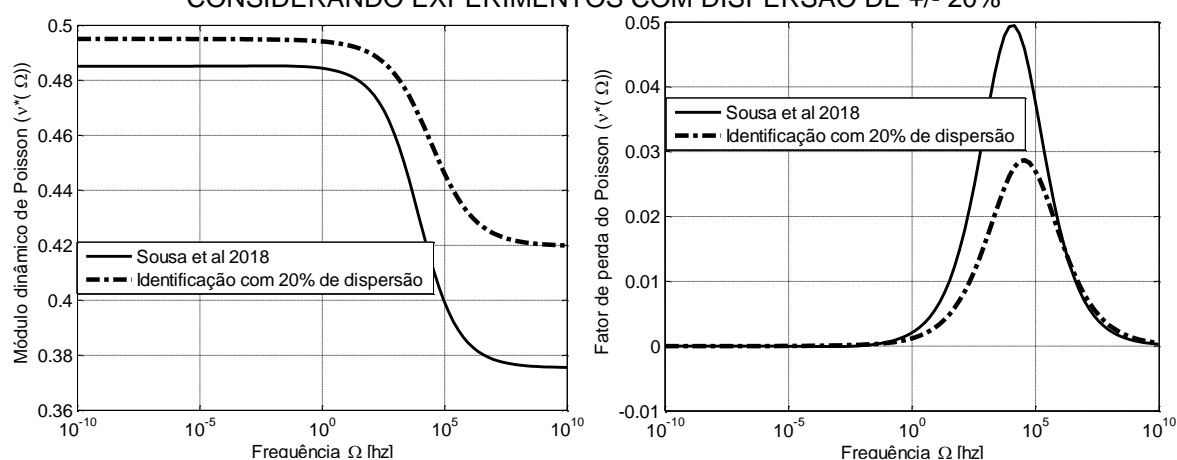
FONTE: O autor (2018).

FIGURA 44 - COMPARAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON CONSIDERANDO EXPERIMENTOS COM DISPERSÃO DE +/- 10%



FONTE: O autor (2018).

FIGURA 45 - COMPARAÇÃO DA IDENTIFICAÇÃO DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON CONSIDERANDO EXPERIMENTOS COM DISPERSÃO DE +/- 20%



FONTE: O autor (2018).

7.3 NOMOGRAMAS DE FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA

Inicialmente, considerando o domínio da frequência, esta seção apresenta nomogramas para os módulos complexos de Young e de cisalhamento. Posteriormente, é proposto um nomograma para o coeficiente complexo de Poisson. Na sequência, considerando o domínio do tempo, são propostos nomogramas para os módulos de relaxação em tração e cisalhamento, bem como para coeficiente de Poisson. Para todos os nomogramas apresentados nesta seção, os parâmetros viscoelásticos empregados foram obtidos anteriormente para o MVE EAR®-C1002 são apresentados na TABELA 9.

TABELA 9 - PROPRIEDADES MECÂNICAS DO MATERIAL EAR®-C1002 OBTIDAS A PARTIR DA TABELA 8

Parâmetros viscoelásticos	Valores numéricos
E_0 (MPa)	2,128667556644E+06
E_∞ (MPa)	1,723757249223E+09
b_E	1,279369260811E-02
G_0 (MPa)	7,119033966574E+05
G_∞ (MPa)	6,202192164498E+08
b_G	1,189166029556E-02
β	4,524176145415E-01
C_1^T	1,433136320936E+01
C_2^T ($^{\circ}\text{C}$)	1,031149458767E+02

FONTE : O autor (2018).

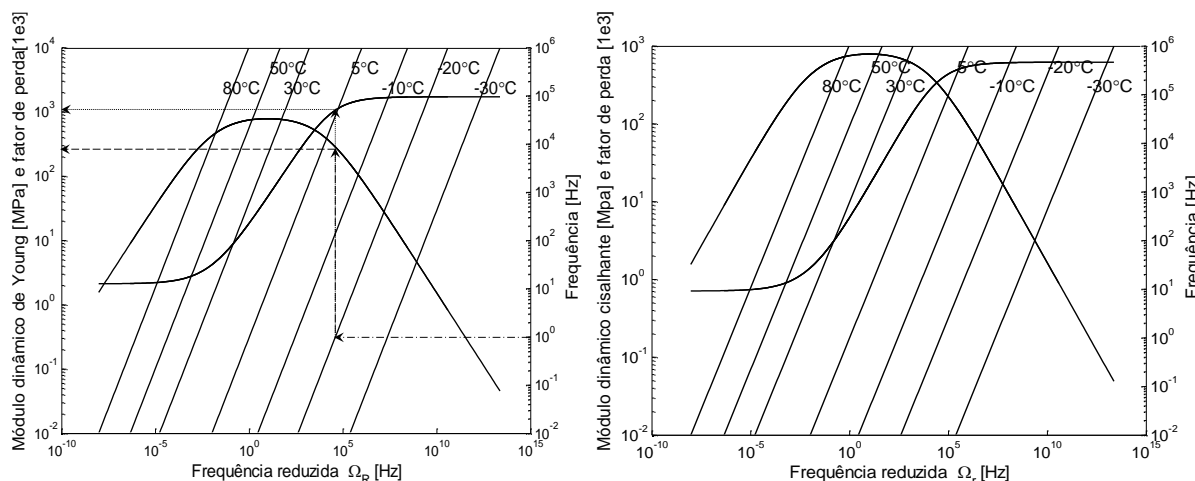
7.3.1 Nomograma dos módulos complexos de Young de cisalhamento e do coeficiente complexo de Poisson

Utilizando a metodologia apresentada para a construção de nomogramas e as propriedades mecânicas, apresentadas na TABELA 9, são construídos os nomogramas para as funções viscoelásticas complexas (Módulo complexo de Young e cisalhamento e coeficiente complexo de Poisson). Em todos os casos, utilizando os nomogramas, as propriedades mecânicas são obtidas no intervalo de frequência entre 10^{-2} Hz e 10^6 Hz para as seguintes temperaturas: -30°C , -20°C , -10°C , 5°C , 30°C , 50°C e 80°C . Contudo, podem ser arbitradas outras temperaturas para serem incluídas no nomograma.

A FIGURA 46 apresenta os nomogramas construídos para os módulos complexos de Young e de cisalhamento. Nesse caso, os módulos de armazenamento e o fator de perda estão mostrados no mesmo gráfico. Note-se que o fator de perda obtido no gráfico deve ser dividido por 10^3 . Por exemplo, considere uma frequência

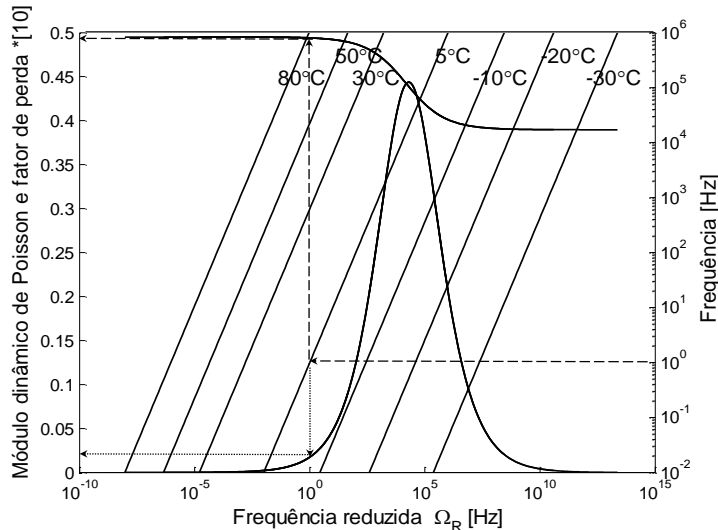
próxima de 1 Hz e uma temperatura de -20°C no nomograma relativo ao módulo complexo de Young. Neste caso, o caminho descrito pela linha tracejada na FIGURA 46 (esquerda) apresenta que o fator de perda é aproximadamente 0,2. Além disso, o valor do módulo dinâmico de Young é aproximadamente 1000 MPa.

FIGURA 46 - NOMOGRAMA DO MÓDULO COMPLEXO DE YOUNG (ESQUERDA) E NOMOGRAMA DO MÓDULO COMPLEXO DE CISALHAMENTO (DIREITA)



FONTE: O autor (2018).

FIGURA 47 - NOMOGRAMA DO COEFICIENTE COMPLEXO DE POISSON



FONTE: O autor (2018).

O coeficiente complexo de Poisson pode ser obtido substituindo os parâmetros apresentados da TABELA 9 na equação (83). Com isso, pode ser proposto na FIGURA 47 um nomograma para o coeficiente complexo de Poisson, onde são construídos num único gráfico o módulo dinâmico e o fator de perda do Coeficiente de Poisson. A obtenção das propriedades pode ser realizada de forma análoga. Como exemplo, para uma frequência próxima de 1 Hz e uma temperatura de

5°C, os valores do módulo dinâmico e do fator perda do Poisson são próximos de 0,49 e 0,01, respectivamente.

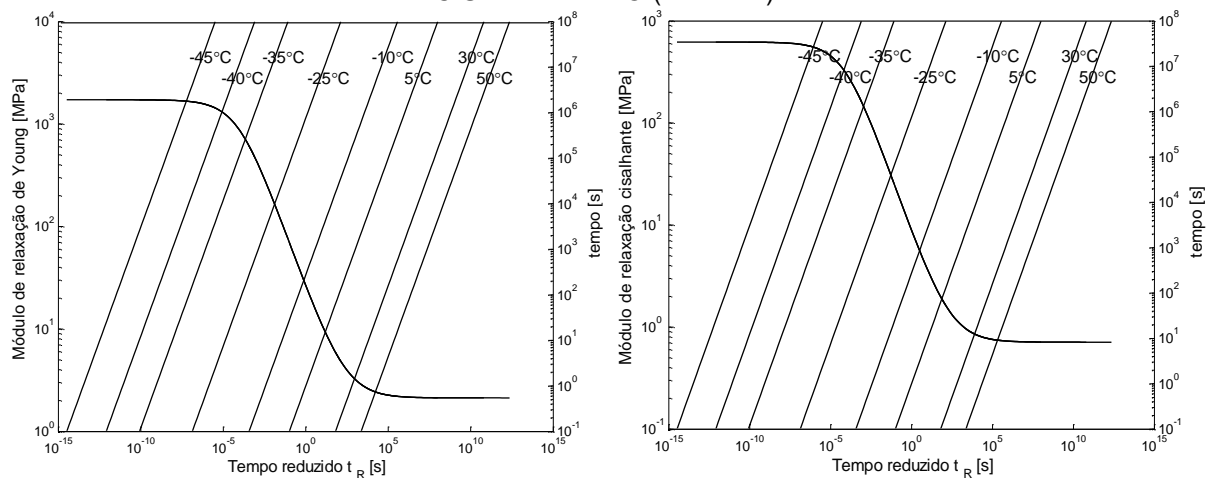
Os nomogramas apresentados nesta seção formam uma base que pode ser utilizada para obtenção de propriedades mecânicas de MVEs de forma rápida e eficiente, no domínio da frequência. Para tanto, é necessário definir a frequência e a temperatura de interesse e, por meio da metodologia aqui discutida, obter as propriedades dinâmicas das funções viscoelásticas em análise.

7.3.2 Nomograma dos módulos de relaxação em tração cisalhamento e do coeficiente de Poisson definidos no domínio do tempo

Dada a consolidação das funções viscoelásticas para o domínio do tempo por meio dos parâmetros apresentados na TABELA 9, são propostos os nomogramas relativos aos módulos de relaxação em tração e em cisalhamento, apresentados na FIGURA 48. Na sequência, é proposto o nomograma relativo ao coeficiente de Poisson, para o domínio do tempo (FIGURA 49). Em todos os casos, as propriedades podem ser obtidas num intervalo de tempo, em segundos, entre 1s e 10⁸s (próximo de 2 anos) nas seguintes temperaturas: -45°C, -40°C, -35°C, -25°C, -10°C, 5°C, 30°C e 50°C. Ressalta-se que outras temperaturas podem ser escolhidas e incluídas no nomograma.

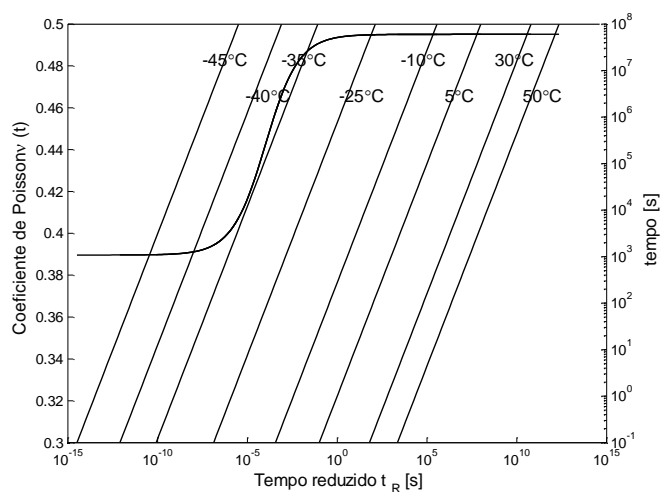
Nota-se que os gráficos dos nomogramas no domínio do tempo são formas inversas dos nomogramas correspondentes no domínio da frequência. Por exemplo, o módulo de relaxação é uma curva monotonicamente decrescente no tempo. Porém, seu correspondente na frequência, a saber, o módulo dinâmico de Young, apresenta um comportamento crescente para frequências crescentes. Por sua vez, o coeficiente de Poisson, no domínio do tempo, é uma função monotonicamente crescente. Entretanto, o módulo dinâmico de Poisson se apresenta monotonicamente decrescente em frequência crescente. Todos esses resultados garantem significado físico coerente para o comportamento do material (Tschoegl, 2002; Pritz, 2007, Sousa, 2018), o que demonstra que a metodologia se mostra promissora e com bom potencial de aplicação.

FIGURA 48 - NOMOGRAMA PARA OS MÓDULOS DE RELAXAÇÃO EM TRAÇÃO (ESQUERDA) E CISALHAMENTO (DIREITA)



FONTE: O autor (2018).

FIGURA 49 - NOMOGRAMA DO COEFICIENTE DE POISSON NO DOMÍNIO DO TEMPO



FONTE: O autor (2018).

8 CONCLUSÕES E SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho propõe e aplica metodologias para caracterizar indiretamente funções viscoelásticas nos domínios do tempo (módulos de relaxação de Young e de cisalhamento e coeficiente de Poisson) e da frequência (módulos complexos de Young, de cisalhamento, volumétrico e coeficiente complexo de Poisson) utilizando um MVE linear e termorreologicamente simples descrito segundo o modelo constitutivo de Zener fracionário.

Neste capítulo, são discutidas as principais contribuições deste trabalho para o presente estado da arte no que tange à caracterização de propriedades mecânicas de MVEs lineares e termorreologicamente simples. Na sequência, apresentam-se algumas sugestões de trabalhos futuros.

8.1 IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Considerando o domínio da frequência, este trabalho discute duas metodologias de identificação de MVEs, aqui denominadas, de método tradicional e método integrado. Ambas as metodologias utilizam técnicas híbridas de otimização. Nesse caso, inicialmente, obtém-se por AG um vetor de variáveis de projeto próximo do ponto ótimo global. Na sequência, esse vetor é utilizado como ponto inicial em um processo de otimização baseado em PNL para obter os parâmetros materiais ótimos.

Observa-se, que utilizando a metodologia tradicional, bons resultados são obtidos nos ajustes dos modelos analíticos aos dados experimentais. No entanto, a curva do módulo dinâmico e do fator de perda do coeficiente complexo de Poisson apresentam comportamentos inadequados. Tais resultados não possuem significado físico e divergem da teoria. Consequentemente, infere-se que um procedimento mais robusto é necessário a fim de obter um conjunto consistente de funções viscoelásticas, as quais atendam aos requisitos físicos básicos.

Nesse contexto, foi proposta e implementada uma metodologia, aqui denominada de integrada. Esta metodologia é baseada na premissa que a temperatura influencia igualmente os comportamentos mecânicos dos módulos complexos de Young e de cisalhamento e, além disso, tais módulos complexos possuem mesma a ordem de diferenciação. Ademais, no processo de otimização, são impostas algumas restrições para a função viscoelástica módulo complexo de Poisson. Como resultados, foram obtidos ajustes adequados dos modelos analíticos

aos dados experimentais. Além disso, o módulo dinâmico, do coeficiente complexo de Poisson, se mostra monotonicamente decrescente e o seu fator de perda possui um ponto de máximo. Assim, partindo dos modelos identificados para os módulos complexos de Young e cisalhamento, obtém-se o módulo complexo volumétrico. Nota-se que a curva apresentada é monotonicamente crescente ao longo da frequência e está localizada acima dos módulos complexos de Young e de cisalhamento. Estes resultados estão coerentes com a teoria pois, tanto o coeficiente complexo de Poisson como o módulo complexo volumétrico, possuem significado físico.

Portanto, considerando os experimentos aqui apresentados no domínio da frequência, este trabalho apresenta uma metodologia robusta e eficiente para caracterização híbrida do coeficiente de Poisson para MVEs lineares e termorreologicamente simples.

8.2 IDENTIFICAÇÃO NO DOMÍNIO DO TEMPO

Para o domínio do tempo, tendo como base funções viscoelásticas para os módulos de relaxação de Young e de cisalhamento e empregando o modelo constitutivo de Zener fracionário, descreve-se matematicamente a obtenção de um modelo para o coeficiente de Poisson em função do tempo e da temperatura.

Na sequência, a partir de três conjuntos de dados experimentais artificiais com dispersões de 0%, 10% e 20% para os módulos de relaxação (em tração e cisalhamento), identifica-se o material viscoelástico EAR[®]-C1002. Para tanto, aplica-se uma técnica híbrida de otimização e obtêm-se parâmetros viscoelásticos do material. Similarmente, como realizado para o domínio da frequência, a identificação é realizada empregando duas metodologias: tradicional e integrada. Empregando a metodologia tradicional, são obtidos resultados adequados somente para quando a dispersão é nula. Entretanto, para quando as dispersões são de 10% e de 20%, resultados gráficos inadequados para o coeficiente de Poisson são obtidos. Esse fato indica que a tradicional metodologia que se baseia na identificação das funções viscoelásticas isoladamente, se mostra bastante sensível a erros experimentais.

Nesse contexto, foi proposta e implementada uma metodologia mais robusta de identificação, a qual contempla algumas restrições físicas no processo de otimização. Como resultado dessa implementação, inicialmente, obtém-se a função viscoelástica para coeficiente de Poisson, definida no domínio do tempo e, na sequência, por interconversão, obtém-se o coeficiente complexo de Poisson, definido

no domínio da frequência. Observa-se que para dispersões de 10% e 20%, são obtidas funções com comportamentos adequados e fisicamente coerentes.

Dessa forma, os resultados obtidos, empregando o método integrado, se mostram confiáveis, pois vão de encontro a comportamentos físicos adequados: para o domínio do tempo, o coeficiente de Poisson se mostra crescente e, no domínio da frequência, o coeficiente dinâmico de Poisson se apresenta decrescente e o fator de perda do mesmo possui um único ponto de máximo. Portanto, a metodologia aqui proposta é promissora e com um grande potencial de aplicação.

8.3 NOMOGRAMAS DE FUNÇÕES VISCOELÁSTICAS NOS DOMÍNIOS DO TEMPO E DA FREQUÊNCIA

Consolidadas as identificações do MVE, foi proposta e implementada uma metodologia para construção e avaliação de nomogramas nos domínios do tempo e/ou da frequência.

Inicialmente, considerando o domínio da frequência, foram apresentados nomogramas para os módulos complexos de Young e de cisalhamento. Posteriormente, foi proposto um nomograma para o coeficiente complexo de Poisson, o qual é composto de duas funções viscoelásticas, o módulo dinâmico e o fator de perda de Poisson. A partir desse nomograma, os valores das propriedades (módulo dinâmico e fator de perda de Poisson) podem ser obtidos de forma rápida para a frequência e a temperatura requeridas.

Na sequência, foram propostos nomogramas de funções viscoelásticas, definidas no domínio do tempo. Nesse caso, utilizando a metodologia, aqui apresentada, foram propostos nomogramas para os módulos de relaxação em tração e em cisalhamento e, na sequência, foi proposto o nomograma para o coeficiente de Poisson, no domínio do tempo. Os gráficos obtidos para esses nomogramas descrevem o comportamento inverso de nomogramas correspondentes no domínio da frequência. Tais resultados garantem significado físico coerente para o comportamento do material.

Como contribuições principais para o estado da arte, o presente trabalho propõe a construção de novos nomogramas de funções viscoelásticas, nos domínios do tempo e da frequência, os quais permitem uma visualização rápida e precisa dos comportamentos dinâmicos do MVE em análise.

8.4 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

Para melhores estudos sobre a identificação completa do comportamento mecânico de MVEs, como alternativas para trabalhos futuros sugerem-se:

- Realizar a mesma identificação das funções viscoelásticas empregando técnicas avançadas de estatísticas;
- Realizar experimentos para obtenção do coeficiente de Poisson de modo direto em várias temperaturas e, com isso, identificar indiretamente as funções viscoelásticas;
- Obter os módulos complexos (Young e de cisalhamento) empregando uma mesma amostra e, com isso, obter o coeficiente de Poisson indiretamente;
- Obter indiretamente o coeficiente de Poisson considerando o efeito da pressão nos ensaios de cisalhamento;
- Utilizar modelos constitutivos fracionários com mais termos no processo de identificação completa de MVEs.

REFERÊNCIAS

AILI, A.; VANDAMME, M.; TERRENTI, J. M.; MASSON, B.. Difference between creep and relaxation Poisson's ratios: theoretical and practical significance for concrete creep testing. In: **10th International Conference on Mechanics and Physics of Creep, Shrinkage, and Durability of Concrete and Concrete Structures**, p. 1219-1225, 2015.

AKCELRUD, L.. **Fundamentos da Ciência dos Polímeros**. Editora Manole Ltda.: Barueri, 2007.

ARORA, J. S.. **Introduction to Optimum Design**. 4. th. Elsevier Academic Press: San Diego, 2014.

ASCENSÃO, M. J. S.. **Identificação de Propriedades Mecânicas de Materiais Viscoelásticos por um Método Inverso Baseado em Elementos Finitos e Funções Resposta em Frequência**. 104f. Dissertação (Mestrado Integrado em Engenharia Mecânica). Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Porto, 2012.

ASHRAFI, H. M. KASRAEI; FARAHNAKY, A.. Mathematical modeling of the time-dependent Poisson's ratio in linear viscoelastic solid-like foods. In **18th National Congress on Food Technology**, Iran, 2008.

ATANACKOVIĆ, T. M.; PILIPOVIĆ, S.; STANKOVIĆ, B.; ZORICA, D.. **Fractional Calculus with Applications in Mechanics**. Croydon: Wiley, 2014.

BAGLEY, R. L.; TORVIK, J.. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. **Journal of Rheology**, vol. 30, p. 133–155, 1986.

BALBINO, F. O.. **Análise Estatística de Dados Experimentais na Caracterização Dinâmica de Materiais Viscoelásticos**. 109f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

BALBINO, F. O.. **Estimação de Propriedades Dinâmicas de Materiais Viscoelásticos Utilizando Abordagem Bayesiana**. 143f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

BARRIENTOS, E.; PELAYO, F.; NORIEGA, A; LAMELA, M .J.; CANTELI, A. F.; TANAKA, E.. Optimal discrete-time Prony series fitting method for viscoelastic materials. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, in press, July 2018.

BARRUETABEÑA, J. G.; CORTÉS, F.; ABETE, J. M.; FERNANDEZ, P.; LAMENA, M. L.; CANTELI, A. F.. Experimental characterization and modelization of the relaxation and complex moduli of a flexible adhesive. **Materials and Design**, vol. 32, p. 2783-2796, 2011.

BARRUETABEÑA, J. G.; CORTÉS, F.; ABETE, J. M.; FERNANDEZ, P.; LAMENA, M. L.; CANTELI, A. F.. Relaxation modulus-complex modulus interconversion for

linear viscoelastic materials. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, vol. 17, p. 465-479, 2013.

BAUMGAERTEL, M; WINTER, H. H. Determination of discrete relaxation and retardation time spectra from dynamic mechanical data. **The Journal Rheological Acta**, vol. 28, p. 511-519, 1989.

BAUWENS, J. C.; BAUWENS-CROWET, C.; HOMES, G.. Tensile yield-stress behavior of poly(vinyl chloride) and polycarbonate in the glass transition region. **Journal of Polymer Science: Part a-2**, vol. 7, p.1745-1754, 1969.

BAUWENS-CROWET, C.. The compression yield behaviour of polymethyl methacrylate over a wide range of temperatures and strain-rates. **Journal of Materials and Science**, vol. 8, p.968-979, 1973.

BOVEY, F. A., WINSLOW, F. H.. **Macromolecules: An Introduction to Polymer Science**. Academic Press: New York, 1979.

BOOIJ, H. C., THOONE, G. P. J. M.. Generalization of Kramers-Kronig transforms and some approximations of relations between viscoelastic quantities. **Rheologica Acta**, vol. 21, p. 15-24, 1982.

BOWER, D. I.. **An Introduction to Polymer Physics**. Cambridge University Press: United Kingdom, 2002.

BRINSON, H.F.; BRINSON, L.C.. **Polymer Engineering Science and Viscoelasticity: An Introduction**. New York: Ed. Springer, 2008.

CALLISTER, W.D.. **Materials Science and Engineering-An Introduction**. 5th ed.. United States of America: John Wiley & Sons, 2001.

CANEVAROLO JR., S. V. **Ciência dos Polímeros: Um Texto Básico para Tecnólogos e Engenheiros**. 2. ed. Artiber: São Paulo, 2006.

CAO, K.; WANG, Y.; WANG, Y.. Effects of strain rate and temperature on the tension behavior of polycarbonate. **Materials and Design**, vol. 38, p. 53-58, 2012.

CHAE, S. H.; ZHAO, J. H.; EDWARDS, D. R.; HO, P. S.. Characterization of the viscoelasticity of molding compounds in the time domain. **Journal of Electronic Materials**, vol. 39, n. 4, p. 419-425, 2010.

CHAILLEUX, E.; RAMOND, G.; SUCH, C.; ROCHE, C. L.. A mathematical-based master-curve construction method applied to complex modulus of bituminous materials. **Road Materials and Pavement Design**, EATA, vol. 7, n. 18, p. 75-92, 2006.

CHANDA, M.; ROY, S. K.. **Plastics Technology Handbook**. 4. ed. CRC Press: London, 2006.

CHEN, T. Determining a Prony Series for a viscoelastic material from time varying strain data. **National Technical Information Service**, NASA, Relatório técnico, 2000.

CHEN, D. L.; CHIU, T. C. C.; YANG, P. F.; JIAM, S. R.. Interconversions between linear viscoelastic functions with a time-dependent bulk modulus. **Mathematics and Mechanics of Solids**, p. 1 - 17, 2017.

CHEN, D. L.; YANG, P. F.; LAI, Y. S.. Interconversions between linear viscoelastic functions by using relaxation-creep duality representation. **Mathematics and Mechanics of Solids**, vol. 18, p. 701-421, 2012.

CHRISTENSEN, R. M.. **Theory of Viscoelasticity**. 2. nd. Academic Press: California, 1982.

CINIELLO, A. P. D.; BAVASTRI, C. A.; PEREIRA, J. T.. Identifying mechanical properties of viscoelastic materials in time domain using the fractional Zener model. **Latin American Journal of Solids and Structures**, vol. 14, p. 131 - 152, 2016.

CINIELLO, A. P. D.. **Aplicação do Cálculo Fracionário em Identificação de Propriedades Mecânicas de Materiais Viscoelásticos no Domínio do Tempo**. 121f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

Computer Aided Material Pre-Selection by Uniform Standards (CAMPUS®). <http://www.campusplastics.com/>. Acesso em 10/09/2018.

CRUZ, G. A. M.. **Projeto de Neutralizadores Viscoelásticos Baseado no Modelo a Derivadas Fracionárias**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Santa Catarina, Brasil, 2004.

CUI, H. R.; TANG, G. J.; SHEN, Z., B.. Study on the viscoelastic Poisson's ratio of solid propellants using digital image correlation method. **Propellants, Explosives, Pyrotechnics**, vol. 41, p 835 – 843, 2016.

CYR, J. L.; CROCHON, T.; LI, C.; LÉVESQUE, M.. Interconversion of linearly viscoelastic material functions expressed as Prony series: a closure. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, vol. 17, p. 53-82, 2013.

DANDEKAR, D. P., GREEN, J. L., HANKIN, M., MARTIN, A. G., WEISGERBER, W., SWANSON, R. A.. **Deformation of ISODAMP (a polyvinyl chloride-based elastomer) at various loading rates**. US army laboratory command materials technology laboratory, may: 1991.

DAS, S.. **Functional Fractional Calculus**. India: Springer, 2011.

DOETSCH, G.. **Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation**. New York: Springer, 1974.

DONOLATO, C.. Analytical and numerical inversion of the Laplace–Carson transform by a differential method. **Computer Physics Communications**, vol. 145, p. 298-309, 2002.

DOOLITTLE, A. K.; DOOLITTLE, D. B.; Studies in Newtonian flow. v. further verification of the free-space viscosity equation. **Journal of Applied Physics**, v. 28, p. 901-905, 1957.

EBEWELE, R. O.. **Polymer Science and Technology**. CRC Press: New York, 2000.

EMRI, I.; BERNSTORFF, R.; CVELBAR, R.; NIKONOV, A.. Re-examination of the approximate methods for interconversion between frequency and time dependent material functions. **Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics**, vol. 129, p. 75 - 84, 2005.

EMRI, I., PRODAN, T.. A measuring system for bulk and shear characterization of polymers. **Experimental Mechanics**, vol. 46, p. 429-439, 2006.

EMRI, I.; ZUPANČIČ, B.; GERGESOVA, M.; SAPRUNOV, I.; GUTIERREZ, J. G.; BEK, M.. Importance of viscoelastic characteristics in determining functionality of time-dependent materials. **Dyna**, v. 79, p. 97-104, 2012.

ERNST, L. J.; ZHANG, G. Q.; JANSEN, K. M. B.; BRESSERS, H. J. L.. Time and temperature dependent thermo-mechanical modeling of a packaging molding compound and its effect on packaging process stresses. **Journal of Electronic Packaging**, vol. 125, p. 539-548, 2003.

ESPÍNDOLA, J. J., BAVASTRI, C. A., LOPES, E. M. O.. Design of optimum systems of viscoelastic vibration absorbers for a given material based on the fractional calculus model. **Journal of Vibration and Control**, vol. 14, p. 1607-1630, 2006.

FERRY, J. D.. **Viscoelastic Properties of Polymers**. John Wiley & Sons: New York, 1980.

FERNANDEZ, P.; RODRIGUES, D., LAMELA, M. J.. Study of the interconversion between viscoelastic behaviour functions of PMMA. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, vol. 15, p. 169-180, 2011.

FILLERS, R. W., TSCHOEGL, N. W.. The effect of pressure on the mechanical properties of polymers. **Transactions of the Society of Rheology**, vol. 21, p. 51-100, 1977.

FINDLEY, W. N.; LAY, J. S.; ONARAN, K. **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials**. Amsterdã: North-Holland Publishing Company, 1976.

FLORY, A.; MCKENNA, G. B.. Finite step rate corrections in stress relaxation experiments: a comparison of two methods. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, vol. 8, p. 17-37, 2004.

- GALUCIO, A. C., DEU, J.F., OHAYON, R.. Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. **Computational Mechanics**, vol. 33, p. 282-291, 2004.
- GEORGE, O.. **Principles of Polymerization**. A John Wiley & Sons: New York, 2004.
- GERGESOVA, M.; SAPRUNOV, I.; EMRI, I.. Closed-form solution for horizontal and vertical shifting of viscoelastic material functions in frequency domain. **Journal Rheologica Acta**, vol. 55, p. 351-364, 2016.
- GERGESOVA, M.; ZUPANCIC, B.; SAPRUNOV, I.; EMRI, I.. The Closed Form t-T-P Shifting (CFS) algorithm. **The Society of Rheology**, vol. 55, n. 1, p.1-16, 2010.
- GLÖCKLE, W. G., NONNENMACHER, T. F.. Fractional relaxation and the time-temperature superposition principle. **Rheologica Acta**, vol. 33, n. 337-343, 1994.
- GOLDBERG, D. E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning**. Addison-Wesley: Boston 1989.
- GOLLA, D. F.; HUGHES, P. C.. Dynamic of viscoelastic structures – a time domain, finite element formulation. **Journal of Applied Mechanics**, vol. 52, p. 897–905, 1985.
- GOENFLO, R.; LOUTCHKO, J.; LUCHKO, Y. Computation of the Mittag-Leffler function $E_{\alpha,\beta}(z)$ and its derivative, **Fractional Calculus & Applied Analysis**, n. 5, p. 491-518, 2002.
- GRASSIA, L., D'AMORE, A.. The relative placement of linear viscoelastic functions in amorphous glassy polymers. **Journal of Rheology**, vol. 53, p. 339-356, 2008.
- GRAZIANI, A.; BOCCI, M.; CANESTRARI, F.. Complex Poisson's ratio of bituminous mixtures: measurement and modeling. **Materials and Structures**, vol. 47, p. 1131-1148, 2014.
- GUEDES, R. M.. A viscoelastic model for a biomedical ultra-high molecular weight polyethylene using the time–temperature superposition principle. **Polymer Testing**, vol. 30, p. 294 - 302, 2011.
- HASSANI, B.; HINTON, E.. **Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory**. London: Springer, 1999.
- HAUBOLD, H.J.; MATHAI, A.M.; SAXENA, R.K. Mittag-Leffler functions and their applications. **Journal of Applied Mathematics**, v. 2011, 2009.
- HAUBOLD, H.J.; MATHAI, A.M.; SAXENA, R.K., Mittag-Leffler functions and their applications. **Journal of Applied Mathematics**, vol. 2011, p. 1-51, 2011.
- HE, Y.. Thermomechanical and viscoelastic behavior of a no-flow underfill material for flip-chip applications. **Thermochimica Acta**, vol. 439, n. 8, p. 127-134, 2005.

HONERKAMP, J.; WEESE, J.. Tikhonovs regularization method for ill-posed problems. **Continuum Mechanics and Thermodynamics**, vol. 2, p. 17-30, 1990.

HOPKINS, I. L.; HAMMING, R. W.. On creep and relaxation. **Journal of Applied Physics**, vol. 28, n. 8, p. 906-909, 1957.

HU, G.; TAY, A. A. O.; ZHANG, Y.; ZHU, W.; CHEW, S.. Characterization of viscoelastic behaviour of a molding compound with application to delamination analysis in ic packages. **Electronics Packaging Technology Conference**, p. 53-59, 2006.

JONES, D. I. G.. Temperature-frequency dependence of dynamic properties of damping materials. **Journal of Stored and Vibration**, Vol. 33, n. 4, p. 451-470, 1974.

JONES, D.. **Results of a round-robin test program: complex modulus properties of a polymeric damping material**, USAF Report WL-TR-92-3104, 1992.

JULIAN, M. R.. **Material Characterization of Viscoelastic Polymeric Molding Compounds**. 106 f. Dissertation (Master of science in Mechanical Engineering), Ohio State University, Ohio, 1994.

KALIAPPAN, S. K.. **Characterization of Physical Properties of Polymers Using AFM Force-Distance Curves**. 127 f. Thesis (Phd. in Chemistry), University of Siegen, Siegen 2006.

KASSEM, E.; GRASLEY, Z. C.; MASAD, E.. Viscoelastic Poisson's Ratio of Asphalt Mixtures. **International Journal of Geomechanic**, vol. 13, p. 162-169, 2013.

KAZEM, S.. Exact Solution of Some Linear Fractional Differential Equations by Laplace Transform. **International Journal of Nonlinear Science**, vol. 16, p. 3-11, 2013.

KELCHNER, R. E.; AKLONIS, J. J.. Measurement of the stress-relaxation modulus in the primary transition region. **Journal of Polymer Science: part A-2**, vol. 9, p. 609-614, 1971.

KILBAS, A.A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J.. **Theory and Applications of Fractional Differential Equations**. Elsevier: Amsterdam, 2006.

KNAUSS, W. G.; ZHAO, J.. Improved relaxation time coverage in ramp-strain histories. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, vol. 11, n. 18, p. 199-216, 2007.

KNOFF, W. F.; HOPKINS, I.. An improved numerical interconversion for creep compliance and relaxation modulus. **Journal of Applied Polymer Science**, vol. 16, p. 2963-2972, 1972.

KOPPELMAN, V. J.. Uber den dynamischen elastizitätsmodul von polymethacrylsäuremethylester bei sehr tiefen frequenzen. **Colloid and Polymer Science**, vol. 164, p. 31-34, 1959.

KUGLER, H. P., STACER, R. G., STEIMLE, C.. Direct Measurement of Poisson's Ratio in elastomers. **American Chemical Society**, October: p. 17-20, 1990.

KUHL, A.. **Uma Formulação Viscoelastoplástica não Linear Aplicada ao Polietileno de Alta Densidade (PEAD)**. 135 f. Dissertação (Mestrado acadêmico em Engenharia Mecânica), Universidade do estado de Santa Catarina, Joinville, 2014.

LAI, J.. **Non Linear Time Dependent Deformation Behaviour of High Density Polyethylene**. 159 f. Dissertation (Master of Science in Engineering), Technical University of Delft, The Netherlands, 1995.

LAI, M.; KREMPL, E.; RUBEN, D.. **Introduction to Continuum Mechanics**. 4. ed. Elsevier: USA, 2010.

LAKES, R.; CAPODAGLI, J.. Isothermal viscoelastic properties of PMMA and LDPE over 11 decades of frequency and time: a test of time-temperature superposition. **Journal of Rheology**, vol. 47, p. 777-786, 2008.

LAKES, R.. Viscoelastic measurement techniques. **Review of Scientific Instruments**, vol. 75, n. 4, p. 797-810, 2004.

LAKES, R.. **Viscoelastic Materials**. New York: Cambridge University press, 2009.

LAKES, R. S.; WINEMAN, A.. On poisson's ratio in linearly viscoelastic solids. **Journal of Elasticity**, vol. 85, p. 45 - 63, 2006.

LEE, S.; KNAUSS, W. G.. A Note on the determination of relaxation and creep data from Ramp Tests. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, vol. 4, p. 1-7, 2000.

LEMINI, G.. **Engineering Viscoelasticity**. Springer: New York, 2014.

LIN, Y. J.; HWANG, S. J.; LEE, H. H.; HUANG, D. Y.. Modeling of viscoelastic behavior of epoxy molding compound during and after curing. **Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology**, v. 1, n. 11, p. 1755-1760, 2011.

LICHAEI, B. H.. Application of inversion of Laplace Carson transform by a differential method. **International Journal of Contemporary Mathematical Sciences**, vol. 6, n. 37, p. 1809-1816, 2011.

LI, C., ZENG, F.. **Numerical Methods for Fractional Calculus**. CRC Press: New York, 2015.

LOPES, E. M. O.; BAVASTRI, C. A.; ESPÍNDOLA, J. J.; NETO, J. M. S. Caracterização dinâmica integrada de elastômeros por derivadas generalizadas. In:

III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM), 2004, Belém. **Anais do III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**, 2004.

LOY, R. J.. Interconversion of Prony series for relaxation and creep. **The Society of Rheology**, vol. 59, p. 1261-1270, 2015.

MAINARDI, F.. **Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity – An Introduction to Mathematical Models**. Imperial College Press: London, 2010.

MAINARDI, F.; SPADA G.. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. **The European Physical Journal, Special Topics**, vol. 193, p. 133-160, 2011.

MCTAVISH, D. J.. **The Mini-Oscillator Technique: A Finite Element Method for the Modeling of Linear Viscoelastic Structure**. Institute for Aerospace Studies, University of Toronto, 1988.

MCTAVISH, D. J.; HUGHES, P. C.. Modeling of linear viscoelastic space structures. **Journal of Vibration and Acoustics**, vol. 115, p. 103–110, 1993.

MEAD, D. W.. Numerical interconversion of linear viscoelastic material functions. **The Society of Rheology**, vol. 38, n. 6, p. 1769-1795, 1994.

MEDEIROS, W. B. JR.. **Caracterização Dinâmica Integrada de Elastômeros via Derivadas Fracionárias e Método Golla-Hughes-McTavish**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2010.

MEISSNER, J.. Combined constant strain rate and stress relaxation test for linear viscoelastic studies. **Journal of Polymer Science: Polymer Physics Edition**, vol. 16, p. 915-919, 1978.

MOSCHEN, I. D. C.. **Sobre as Funções Mittag-Leffler e o Modelo Fracionário de Materiais Viscoelásticos**. 130f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

NASHIF, A. D.; JONES, D. I. G.; HENDERSON, J., P.. **Vibration Damping**. New-York: A John Wiley & Sons, 1985.

NAYFEH, S. A.. Damping of flexural vibration in the plane of lamination of elastic–viscoelastic sandwich beams. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 276, p. 689-711, 2004.

NINOMIYA, K.; FERRY, J.. Some approximate equations useful in the phenomenological treatment of linear viscoelastic data. **Journal of Colloid Science**, vol. 14, p. 36-48, 1959.

O'BRIEN, D. J.; MATHER, P. T.; WHITE, S. R.. Viscoelastic properties of an epoxy resin during cure. **Journal of Composite Materials**. vol. 35, n. 10, p. 883-904, 2001.

O'BRIEN, D. J.; SOTTOS, N. R.; WHITE, S. R.. Cure-dependent Viscoelastic Poisson's Ratio of Epoxy. **Experimental Mechanics**, vol. 47, p. 237-249, 2007.

OLIENICK FILHO, E. G.. **Caracterização Dinâmica de Materiais Viscoelásticos Termoreologicamente Simples em Função dos Efeitos da Temperatura, Frequência e Pré-Carga**. 143f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Paraná, Curitiba 2018.

OLIVEIRA, D. S.. **Derivada Fracionária e as Funções de Mittag-Leffler**. 105f. Dissertação (Mestrado em Matemática), Universidade Estadual de Campinas, Campinas 2014.

PACHECO, J. E. L.. **Caracterização de Materiais Viscoelásticos com Aplicação de Séries de Prony e Análise por Elementos Finitos**. 115 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Paraná, Curitiba 2013.

PAPOULIS, A.. **The Fourier integral and its applications**. McGraw-Hill Book Company: New York, 1962.

PARK, S. W.; KIM, Y. R.. Fitting Prony-Series viscoelastic models with power-law presmoothing. **Jornal of Materials in Civil Engineering**, vol. 13, p. 26-32, 2001.

PARK, S. W.; SCHAPERY, R. A.. Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I - A numerical method based on Prony series. **International Journal of Solids and Structures**. vol. 36, p. 1653 - 1675, 1999.

PHILIPPOFF, W., BRODNYAN, J.. Preliminary results in measuring dynamic compressibilities. **Journal of Applied Physics**, vol. 26, p. 846-849, 1955.

POOLER, D. J.. **The Temperature Dependent Non-Linear Response of a Wood Plastic Composite**. 121 f. Dissertation (Master degree in Mechanical Engineering), Washington State University, Washington, 2001.

PRITZ, T.. Analysis of four-parameter fractional derivative model of real solid materials. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 195, p. 103-115, 1996.

PRITZ, T.. Frequency dependences of complex moduli and complex Poisson's ratio of real solid materials. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 214, p. 83-104, 1998.

PRITZ, T.. Measurement methods of complex Poisson's ratio of viscoelastic materials. **Applied Acoustics**, vol. 60, p. 279-292, 2000.

PRITZ, T.. The Poisson's loss factor of solid viscoelastic materials. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 306, p. 790 – 802, 2007.

RAMKUMAR, D. H. S.; CARUTHERS, J. M.; MAVRIDS, H.; SHROFF, R.. Computation of the linear viscoelastic relaxation spectrum from experimental data. **The Journal of Applied Polymer Science**, vol. 64, p. 2177-2189, 1997.

READ, W. T.. Stress analysis for compressible viscoelastic materials. **Journal of Applied Physics**, vol. 21, p. 671 - 674, 1950.

RIBEIRO, E. A., PEREIRA, J. T., BAVASTRI C. A.. Passive vibration control in rotor dynamics: optimization composed support using viscoelastic materials. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 351: 43-56, 2015.

RICHTON, J.; AHZI, S.; VECCHIO, K. S.; JIANG, F. C.; ADHARAPURAPU, R. R.. Influence of temperature and strain rate on the mechanical behavior of three amorphous polymers: Characterization and modeling of the compressive yield stress. **International Journal of Solid and Structures**, vol. 43, p. 2318 – 2335, 2006.

ROULEAU, L.; PIRK, R.; PLUYMERS, B.; DESMET, W.. Characterization and modeling of the viscoelastic behavior of a self-adhesive rubber using dynamic mechanical analysis tests. **Journal of Aerospace Technology and Management**, vol. 7, p. 200-208, 2015.

RUDIN, A.. **The Elements of Polymer Science and Engineering**. 2. ed.. Orlando: Academic Press, 1982.

SAPRUNOV, I.; GERGESOVA, M.; EMRI, I.. Prediction of viscoelastic material functions from constant stress- or strain-rate experiments. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, vol. 18, p. 349-372, 2014.

SCHARPERY, R. A.. A simple collocation method for fitting viscoelastic models to experimental data. **California Institute of Technology**, GALCIT SM 61-23A, 1961.

SCHWARZL, F. R.; STRUIK, L., C., E.. Analysis of relaxation measurements. **Advances in molecular Relaxation processes**, v. 1, n. 55, p. 201-255, 1968.

SCHIFF, J. L.. **The Laplace Transform: Theory and Applications**. Springer: New York, 1999.

SERBAN, D. A.; WEBER, G.; MARSAVINA, L.; Silberschmidt, V. V.; Hufenbach, W.. Tensile properties of semi-crystalline thermoplastic polymers: Effects of temperature and strain rates. **Polymer Testing**, vol. 32, p. 413 - 425, 2013.

SJÖBERG, M.. **On Dynamic Properties of Rubber Isolators**. 28f. Ph.D. Thesis, Royal Institute of Technology (KTH), Stockholm, Sweden, 2002.

SMITH, T. L.. Evaluation of the relaxation modulus from the response to a constant rate of strain followed by a constant strain. **Journal of Polymer Science Polymer Physics Edition**, vol. 17, p. 2181-2188, 1979.

SORVARI, J.; MALINEN, M.. Determination of relaxation modulus of a linearly viscoelastic material. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, vol. 10, n.8, p. 125-133, 2006.

SORVARI, J.; MALINEN, M.. On the direct estimation of creep and relaxation functions. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, vol. 11, p. 143-157, 2007.

SOUSSOU, J. E.; MOAVENZADEH, F.; GRADOWCZYK, M. H.. Application of Prony series to linear viscoelasticity. **Transactions of the Society of Rheology**, v. 14, n. 4, p. 573-584, 1970.

SOUSA, T. L.. **Identificação de Propriedades Mecânicas de Materiais Viscoelásticos no Domínio do Tempo Considerando Influências da Temperatura e da Pressão**. 112f.. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2015.

SOUSA, T. L., KANKE, F., PEREIRA, J. T., BAVASTRI, C. A.. Property identification of viscoelastic solid materials in nomograms using optimization techniques. **Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, vol. 55, p. 1285-1297, 2017.

SOUSA, T. L., SILVA, J., PEREIRA, J. T., 2018. Indirect identifying the complex Poisson's ratio of viscoelastic materials in frequency domain using the fractional Zener model. **Latin American Journal of Solids and Structures**, vol. 9, p. 1-21, 2018

SOUZA, J. C. S. **Caracterização Experimental e Modelagem de Estruturas usando Materiais Viscoelásticos para o Controle Passivo de Vibrações**. 134f. Tese (Doutorado em Projetos e Fabricação), Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2015.

STANKIEWICZ, A.. Identification of relaxation modulus of viscoelastic materials from non-ideal ramp-test histories – problem and method. **TEKA. Commission of Motorization and Energetics in Agriculture**, vol. 13, p. 177-184, 2013.

SZABO, J.P., KEOUGH, I.A.. Method for analysis of dynamic mechanical thermal analysis data using the havriliak-negami model. **Thermochimica Acta**, vol. 392-393, p.1-12, 2002.

THEOCARIS, P. S.. Creep and of relaxation contraction ratio linear viscoelastic materials. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, vol. 12, p. 125-138, 1964.

THEOCARIS, P. S.. Interrelation between dynamic moduli and compliances in polymers. **Kolloid-Zeitschrift und Zeitschrift für Polymere**, vol. 1, p. 1182-1188, 1968.

THOMSON, K. C.. On the complex Poisson's ratio of a urethane rubber compound. **Journal of Applied and Polymer Science**, vol. 10, p. 1133-1136, 1966.

TSCHOEGL, N. W.. **The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior: An Introduction**. New York: Springer, 1989.

TSCHOEGL, N. W.; KNAUSS, W. G.; EMRI, I. The effect of temperature and pressure on the mechanical properties of thermo - and/or piezorheologically simple polymeric materials in thermodynamic equilibrium – A critical review. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, vol. 6, pp. 53-99, 2002.

TSOU, A. H.; GREENER, J.; SMITH, G. D.. Stress relaxation of polymer films in bending. **Polymer**, vol. 36, p. 949-954, 1995.

WARD, I. M.; SWEENEY, J.. **An Introduction to the Mechanical Properties of Solid Polymers**, 2. ed.. Chichester: John Wiley & Sons, 2004.

WATERMAN, H. A.. Relations between loss angles in isotropic linear viscoelastic materials. **Rheologica Acta**, vol. 16, p. 31-42, 1977.

WELCH, S. W. J.; RORRER, R. A. L.; DUREN, R. G. JR.. Application of time-based fractional calculus methods to viscoelastic creep and stress relaxation of materials. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, vol. 3, p. 279-303, 1999.

WILLIAMS, G.; WATTS, D.C.. Non-symmetrical dielectric behaviour arising from a simple empirical decay function. **Transactions of the Faraday Society**, vol. 66, p. 80-85, 1970.

WILLIAMS, M. L.; LANDEL, R. F.; FERRY, J. D.. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. **Journal of the American Chemical Society**, vol. 77, p. 3701-3707, 1955.

XU, J. J.; HAN, Y. J. B.; ZHOU, C.. Research on relaxation modulus of viscoelastic materials under unsteady temperature states based on TTSP. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, vol. 17, p. 543-556, 2013.

YIN, D.; DUAN, X.; ZHOU, X.. Fractional time-dependent deformation component models for characterizing viscoelastic Poisson's ratio. **European Journal of Mechanics A/Solids**, vol. 42, p. 422-429, 2013.

ZAPAS, L. J.; PHILLIPS, J. C.. Simple shearing flows in polyisobutylene solutions. **Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology. Section A: Physics and Chemistry**, vol. 75, n. 1, p. 33-40, 1971.

ZHAO, J.; KNAUSS, W. G.; RAVICHANDRAN, G.. Applicability of the time-temperature superposition principle in modeling dynamic response of a polyurea. **Mechanics of Time-Dependent Materials**, vol. 11, p. 289-308, 2007.

ZHU, Y.; SUN, L.; XU, H.. L-Curve based Tikhonov's regularization method for determining relaxation modulus. **Journal of Applied Mechanics**, vol. 78, n. 3, p. 1-7, 2011.

ZILL, D.; CULLEN, M.I. R.. **Equações Diferenciais**. 3. ed. Pearson: São Paulo, 2000.

APÊNDICE 1

DERIVADA E INTEGRAL FRACIONÁRIA

Existem na literatura várias definições para o cálculo de derivadas ou integrais de ordem fracionárias. Entre elas, destacam-se as de Riemann-Liouville, Caputo, Riesz e Grünwald-Letnikov (KILBAS; SRIVASTAVA; TRUJILLO, 2006; CINIELLO; BAVASTRI; PEREIRA, 2015). Visto que no presente trabalho supõem-se que as informações ocorrem para um tempo $t > 0$, as definições de Riemann-Liouville se mostram as mais apropriadas para representar as funções viscoelásticas envolvidas neste trabalho, conforme afirmam Mainard (2010) e Ciniello (2015).

Conforme Das (2011), Atanacković et al. (2014) e Oliveira (2014), supondo uma função $f(t)$ bem comportada no intervalo $t \in (a, b)$, sua integral fracionária de Riemann-Liouville à esquerda e de ordem α é definida por

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-u)^{\alpha-1} f(u) du, \quad (125)$$

onde α é um parâmetro real e positivo e $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$ é a função Gama de Euler. Por outro lado, a integral fracionária de Riemann-Liouville à direita e de ordem α é definida por

$${}_t I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (t-u)^{\alpha-1} f(u) du. \quad (126)$$

Com isso, segundo Mainardi (2010), as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita de ordem α e parâmetro p , onde p é um número inteiro e positivo, tal que $p-1 \leq \alpha \leq p$, são definidas respectivamente, como

$${}_{RL} D_{a,t}^\alpha f(t) = \frac{d^p}{dt^p} \left[{}_a I_{a,t}^{(p-\alpha)} f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(p-\alpha)} \frac{d^p}{dt^p} \int_a^t \frac{f(u)}{(t-u)^{\alpha-p+1}} du \quad (127)$$

e

$${}_{RL} D_{t,b}^\alpha f(t) = (-1)^m \frac{d^p}{dt^p} \left[{}_t I_{t,b}^{(p-\alpha)} f(t) \right] = \frac{(-1)^p}{\Gamma(p-\alpha)} \frac{d^p}{dt^p} \int_t^b \frac{f(u)}{(t-u)^{\alpha-p+1}} du. \quad (128)$$

FUNÇÃO DE MITTAG-LEFFLER

Como posto por Gorenflo, Loutchko e Luchko (2002) e Mainardi (2010), as funções de Mittag-Leffler (ML) estão diretamente relacionadas às equações diferenciais e integrais de ordem fracionária e com integrais do tipo Abel. Assim, como a natureza da função exponencial é a solução de equações diferenciais de ordem inteira, a função de ML tem um papel análogo para solução de equações diferenciais de ordem não inteira (CINIELLO, 2016).

A função de ML de um parâmetro, denotada por $E_\alpha(z)$ com $\alpha > 0$, pode ser definida por uma representação em série convergente no plano complexo, \mathbb{C} , na forma

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+\alpha n)}, \quad \alpha > 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (129)$$

onde Γ é a função gama de Euler. Para a convergência da série de potências na equação (129), o parâmetro α pode ser complexo, desde que $\text{Re}(\alpha) > 0$ (Mainardi, 2010). A função de ML é uma generalização da função exponencial, tendo em vista a substituição de $n! = \Gamma(n+1)$ com $(\alpha n) = \Gamma(\alpha n+1)$, onde Γ é a função Gamma. Conforme Haubold (2011) e Mainardi (2010), a partir da definição da função ML, equação (129), são notáveis algumas relações importantes tais como

$$E_1(z) = e^z; \quad E_2(z^2) = \cosh(z); \quad E_2(-z^2) = \cos(z) \quad (130)$$

e

$$E_{1/2}(\pm z) = e^z \left[1 + \text{fer}(\pm z^{1/2}) \right] = e^z \text{ferc}(\pm z^{1/2}) \quad (131)$$

onde $z \in \mathbb{C}$, 'fer' é a função erro e 'ferc' é a função erro complementar, as quais são definidas, respectivamente, como (HAUBOLD et al., 2009; CINIELLO, 2016)

$$\text{fer}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z (e^{-u^2}) du \quad \text{e} \quad \text{ferc} := 1 - \text{fer}(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (132)$$

Mainardi (2010) afirma que uma extensão da função de ML pode ser obtida substituindo a constante aditiva 1 do argumento da função Gamma, equação(129), por um parâmetro complexo arbitrário μ . Assim a representação da função de ML com dois parâmetros, α e μ , pode ser posta como

$$E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{\Gamma(\mu + \alpha n)} \right), \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (133)$$

É evidente que $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$.

APLICAÇÃO DA FUNÇÃO DE MITTAG-LEFFLER NO CORRENTE TRABALHO

Neste trabalho, a função ML é aplicada para as definições dos módulos de relaxação e de fluência segundo os modelos constitutivos de Zener Fracionário. Como exemplo, mostra-se a aplicação para a relaxação.

Considere-se que o argumento da função de ML é dado por

$$z = -\left(\frac{t}{\tau_a} \right)^{\alpha}, \quad (134)$$

onde $0 \leq \alpha \leq 1$, τ_a é um parâmetro fixo e característico do sistema analisado. Assim, a partir da equações (129), obtém-se

$$E_{\alpha} \left(-\left(\frac{t}{\tau_a} \right)^{\alpha} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{t}{\tau_a} \right)^{\alpha n}}{\Gamma(1 + \alpha n)}, \quad (135)$$

Conforme Mainardi (2010) e Ciniello (2015), ao analisar os comportamentos das assíntotas para um tempo muito pequeno e para um tempo muito grande, têm-se, respectivamente, que

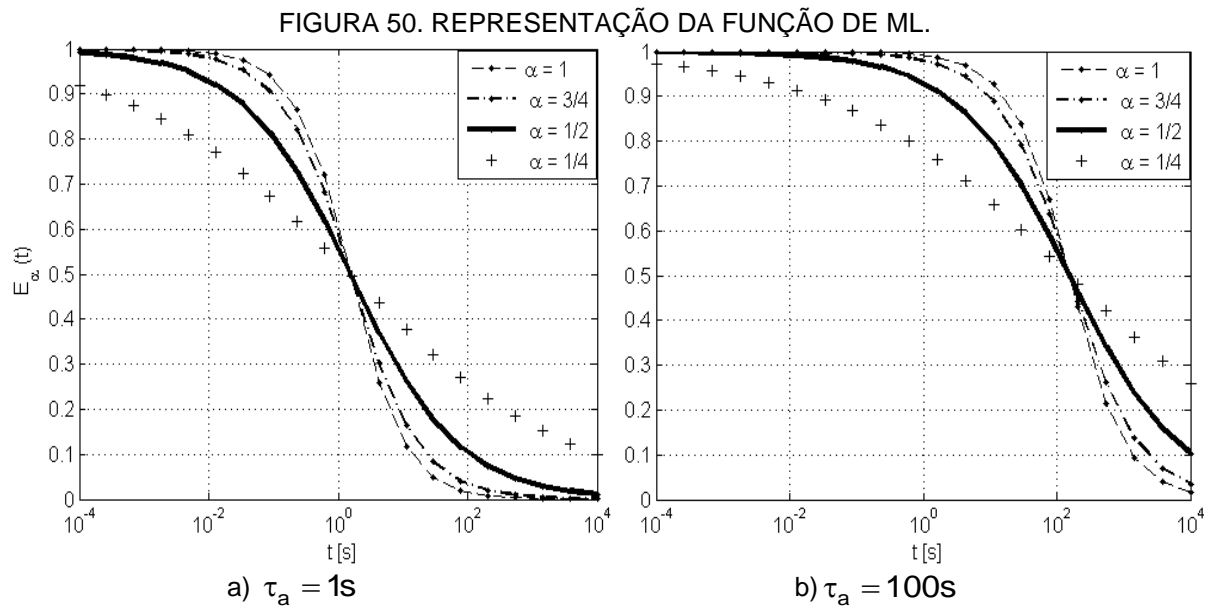
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left[E_{\alpha} \left(-\left(\frac{t}{\tau_a} \right)^{\alpha} \right) \right] \cong 1 - \frac{\left(\frac{t}{\tau_a} \right)^{\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha n)} \approx 1 \quad (136)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[E_{\alpha} \left(-\left(\frac{t}{\tau_a} \right)^{\alpha} \right) \right] \cong \frac{\left(-\frac{t}{\tau_a} \right)^{-\alpha}}{\Gamma(1 + \alpha n)} \approx 0. \quad (137)$$

Mainardi (2011) afirma que quando $(t/\tau_a)^{\alpha} \geq 0$, a função de ML apresenta um decréscimo muito rápido para $(t/\tau_a)^{\alpha} \rightarrow 0^+$. Por outro lado, ocorre um decréscimo

muito lento para quando $(t / \tau_a)^\alpha \rightarrow \infty$, devido ao fato de uma potência negativa. Isso fica evidente na representação gráfica dessa função para diferentes valores de α e com $\tau_a = 1\text{s}$ (FIGURA 50a) e com $\tau_a = 100\text{s}$ (FIGURA 50b).



FONTE: O autor (2017).

APÊNDICE 2

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Seja $f(t)$ uma função definida por $t \geq 0$, então a integral

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (138)$$

resulta numa função de s , $F(s)$, a qual é chamada de transformada de Laplace de $f(t)$ desde que a integral convirja (DOETSCH, 1947; (PAPOULIS, 1962; ZILL e CULLEN, 2000). A variável transformada, s , é, em geral, um número complexo, o qual pode ser escrito como

$$s = a + i\Omega \quad (139)$$

onde $i = \sqrt{-1}$ (PAPOULIS, 1962). Quando se trata de excitações senoidais em regime permanente, o princípio da correspondência requer que a parcela real da variável complexa “ s ” tenda para um valor nulo, isto é, $a \rightarrow 0$, o que consequentemente resulta em $s \rightarrow i\Omega$ (PAPOULIS, 1962).

PROPRIEDADES DA TRANSFORMADA DE LAPLACE

Uma lista com algumas propriedades da transformada de Laplace, as quais são pertinentes com o estudo de viscoelasticidade, é fornecida a seguir.

Linearidade

Conforme Schiff (1999, a transformada inversa de Laplace é uma transformação linear

$$\mathcal{L}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 \mathcal{L}\{f_1(t)\} + a_2 \mathcal{L}\{f_2(t)\} = a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s) \quad (140)$$

Teorema do valor inicial

Conforme Schiff (1999), o teorema do valor inicial pode ser posto na forma

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s). \quad (141)$$

Teorema do valor final

Conforme Schiff (1999), o teorema do valor final pode ser colocado segundo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s). \quad (142)$$

Transformada da derivada de ordem inteira

Conforme demonstrado nos trabalhos de Doetsch (1974) e Oliveira (2014), se uma função $f(t)$ e suas derivadas $\frac{df(t)}{dt}, \frac{d^2f(t)}{dt^2}, \dots, \frac{d^nf(t)}{dt^n}$ são funções contínuas, não nulas, no intervalo $[0, \infty)$, então vale a relação

$$\mathbf{L}\left\{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right\} = s^n \mathbf{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \frac{df^k(0)}{dt^k}. \quad (143)$$

Portanto, caso $f(t=0) = 0$, então a equação (143) pode ser posta na forma

$$\mathbf{L}\left\{\frac{d^nf(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s). \quad (144)$$

Transformada de Laplace para Derivada Fracionária Segundo Riemann-Liouville

Como demonstrado por Das (2011) e Oliveira (2014), a transformada de Laplace da derivada de Riemann-Liouville a esquerda no intervalo $[0, t]$, é dada por

$$\mathbf{L}\left\{{}_0D_t^\alpha f(t)\right\} = s^\alpha \mathbf{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} \frac{d^k({}_0I_t^{n-\alpha} f(0))}{dt^k}. \quad (145)$$

Das (2011) mostra que, para $0 < \alpha < 1$, tem-se

$$\mathbf{L}\left\{{}_0D_t^\alpha f(t)\right\} = s^\alpha F(s) - [{}_0I_t^{1-\alpha} f(0)] = s^\alpha F(s). \quad (146)$$

Convolução

Sejam duas funções $f(t)$ e $G(t)$ de t . A multiplicação dessas funções, definidas no plano transformado, corresponde a uma convolução no domínio do tempo, denotada por $(f * g)(t)$, a qual pode ser definida pela relação

$$\mathbf{L}^{-1}\{F(s) G(s)\} = (f * g)(t) = \begin{cases} \int_0^t f(t-\xi) g(\xi) d\xi \\ \int_0^t f(\xi) g(t-\xi) d\xi \end{cases}. \quad (147)$$

As duas formas de convolução da integral existem porque a operação de convolução é comutativa.

Por outro lado, a transformada inversa de $\mathbf{L}^{-1}\{sF(s)G(s)\}$ possui quatro formas equivalentes, as quais podem ser postas conforme

$$\mathbf{L}^{-1}\{sF(s)G(s)\} = \begin{cases} f(0)g(t) + \int_0^t \frac{df(\xi)}{d\xi} g(t-\xi) d\xi, \\ f(0)g(t) + \int_0^t \frac{df(t-\xi)}{d(t-\xi)} g(\xi) d\xi, \\ f(t)g(0) + \int_0^t f(t-\xi) \frac{dg(\xi)}{d\xi} d\xi, \\ f(t)g(0) + \int_0^t f(\xi) \frac{dg(t-\xi)}{d(t-\xi)} d\xi. \end{cases} \quad (148)$$

PRINCÍPIO DA CORRESPONDÊNCIA PARA O DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Considere-se que os tensores de tensão, σ , e de deformação, ϵ , podem ser postos, respectivamente, como

$$\sigma(s) = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad (149)$$

e

$$\epsilon(s) = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (150)$$

Pelo PCEV, a Lei de Hooke no plano complexo, considerando um ensaio uniaxial de tração, pode ser posta como

$$\sigma_{11}(s) = \tilde{E}(s) \epsilon_{11}(s) = sE(s) \epsilon_{11}(s). \quad (151)$$

Retransformando a equação (151) para o domínio do tempo, chega-se

$$\sigma_{11}(t) = \int_0^t E(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{11}(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (152)$$

Aplicando a transformada de Fourier à equação (152), obtém-se

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{11}(t) e^{-i\Omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t E(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{11}(\tau)}{d\tau} d\tau e^{-i\Omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon_{11}(\tau)}{d\tau} \int_{-\infty}^{\infty} (E(t-\tau) e^{-i\Omega t} dt) d\tau. \end{aligned} \quad (153)$$

Pelo teorema do deslocamento (LAKES, 2009),

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(\Omega) &= \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon_{11}(\tau)}{d\tau} E^*(\Omega) e^{-i\Omega\tau} d\tau \\ &= E^*(\Omega) \int_0^{\infty} \frac{d\varepsilon_{11}(\tau)}{d\tau} e^{-i\Omega\tau} d\tau \\ &= E^*(\Omega) \varepsilon_{11}(\Omega) \end{aligned} \quad (154)$$

Comparando as equações (151) e (154), tem-se

$$E^*(\Omega) = \tilde{E}(s) \Big|_{s=i\Omega}. \quad (155)$$

Portanto, a transformação do domínio de Laplace para o domínio da frequência, basta a substituição de s por $i\Omega$, onde deve ser realçado que o sistema analisado encontra-se sob regime permanente.

LISTA DAS PRINCIPAIS TRANSFORMADAS DE LAPLACE UTILIZADAS

A seguir, apresenta-se uma lista das transformadas inversas de Laplace relacionadas com o cálculo de derivadas de ordem inteira e fracionária.

TABELA 10 - PRINCIPAIS TRANSFORMADAS DE LAPLACE ÚTEIS PARA O CORRENTE TRABALHO

Transformada de Laplace $F(s)$	Expressão no tempo $f(t)$
1	$\delta(t)$
e^{-as}	$H(t-a)$
$1/s$	$H(t)$
$1/s^2$	$tH(t)$
$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}
$\frac{a}{1+as}$	$e^{(-t/a)}$
$\frac{1}{s(1+as)}$	$1 - e^{(-t/a)}$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - a}, \operatorname{Re}(s) > \lambda ^{1/\alpha}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,t}(at^\alpha)$
$\frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + a}, \operatorname{Re}(s) > \lambda ^{1/\alpha}$	$t^{\beta-1} E_{\alpha,t}(-at^\alpha)$
$\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + \lambda}, \operatorname{Re}(s) > \lambda ^{1/\alpha}$	$E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$
$\frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \lambda}, \operatorname{Re}(s) > \lambda ^{1/\alpha}$	$E_\alpha(\lambda t^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{(s^\alpha - \lambda)}$	$E_\alpha(\lambda t^\alpha)$
$\frac{s^\alpha}{(s^\alpha + \lambda)}$	$E_\alpha(-\lambda t^\alpha)$
$\frac{1}{s^\alpha + a}$	$t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-at^\alpha)$

FONTE: Das (2011) e Atanacković et al. (2014).